2 LA CARTOGRAFIA AERONAUTICA

La cartografia è l'insieme delle operazioni necessarie all'elaborazione, all'allestimento e all'utilizzazione delle carte di rappresentazione grafica del territorio. Essa si basa sui risultati ottenuti dal rilievo del terreno (attraverso le trilaterazioni sui punti di stazionamento o attraverso processi fotogrammetrici) e sui dati ricavati dalle varie documentazioni.
La carte hanno lo scopo di fornire informazioni di tipo visivo sul territorio (elementi presenti, forma, ingombri degli elementi costituenti il territorio) e di tipo geometrico (distanze, angoli, quote, ecc.).
Riuscire a rappresentare su un piano il territorio è stato un problema sempre sentito dall'uomo, fin dall'antichità. Infatti, sono innumerevoli le testimonianze sulla presenza di cartografie in tutte le antiche civiltà. La prima rappresentazione completa e attendibile del mondo conosciuto è stata realizzata da Eratostene (Alessandria II sec. A.C.), il quale riuscì a determinare, per primo, le dimensioni del pianeta. Tuttavia, solo a seguito della scoperta dell'America la cartografia ebbe un forte impulso, tale da portare alla nascita di nuove tecniche, che permisero di realizzare delle carte sempre più affidabili e precise. È di questo periodo il geografo Gerhard Krerner, più noto come Mercatore (Rupelmonde, Fiandra 1512 - Duisburg 1594), che è considerato il fondatore della moderna cartografia impostata su principi matematici. Fu lui il primo a capire che, per la realizzazione delle carte aeronautiche, è utile assegnare alla Terra la forma sferica (ottenuta tramite una serie di approssimazioni del Geoide). Tale forma, infatti, è quella che, pur non rappresentando fedelmente la Terra – è impossibile riportare una superficie sferica su un piano senza commettere errori– permette di ridurre al minimo le deformazioni. Inoltre, consente di mantenere alcune proprietà, in funzione del tipo di carta utilizzata, quali:

- una corretta rappresentazione delle distanze (proiezione equidistante);
- una corretta rappresentazione degli angoli e quindi delle forme (proiezione isogona o conforme);
- una corretta rappresentazione delle aree (proiezione equivalente o autalica).

È dunque impossibile realizzare una carta che presenti più di un requisito, ma è possibile ottenerne una che, pur non soddisfacendo alcun requisito, mantenga le proprie deformazioni entro limiti accettabili (proiezione afilattica).
La rappresentazione di una porzione della superficie terrestre deve essere necessariamente più piccola della sua dimensione reale, quindi deve essere ridotta; è per questo che in cartografia ci si riferisce sempre alla scala di rappresentazione della carta (σ), ossia al rapporto numerico tra le misure lineari rappresentate sulla carta e quelle corrispondenti misurate sul terreno. Tale rapporto si esprime con la frazione 1:N, il cui denominatore è il numero che indica di quante volte deve essere ridotta una lunghezza reale per avere quella corrispondente sulla carta. La scala è inversamente proporzionale al denominatore del rapporto: più grande è il denominatore, più piccola è la scala. Al diminuire della scala, inoltre, diminuiscono anche le informazioni riportate sulla carta.

$$\sigma = \frac{ds'}{dS} = \frac{n}{\frac{R}{r}} \text{ con } n = \frac{ds'}{ds}$$

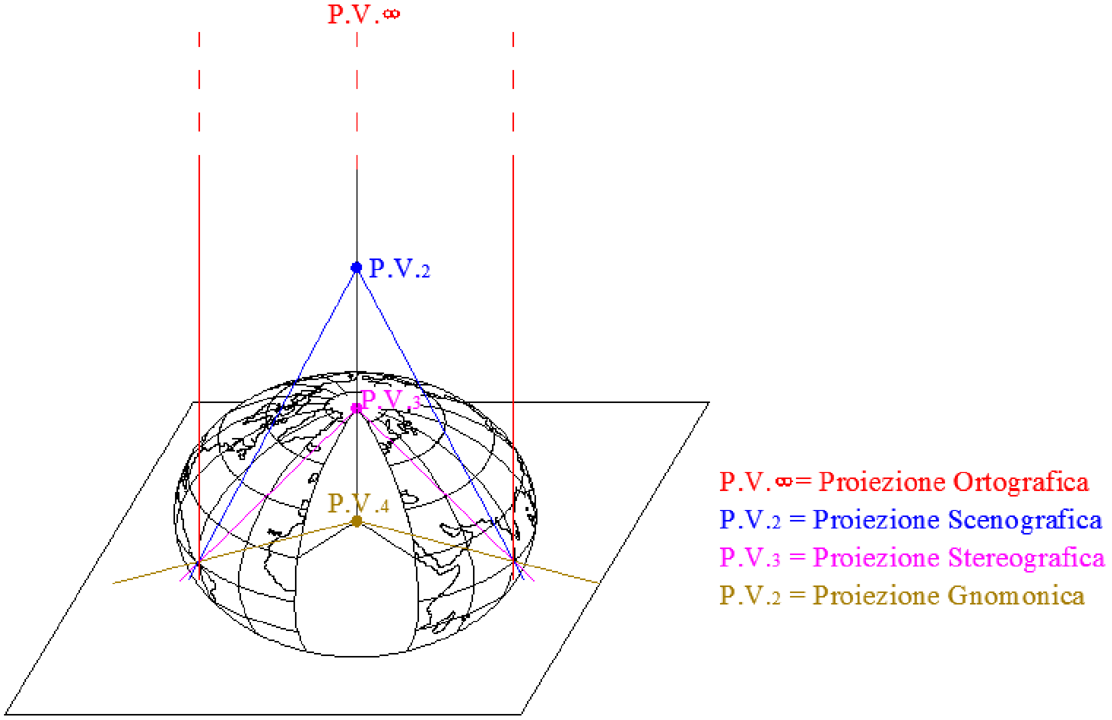
Il rapporto tra l'elemento misurato sulla carta ds' e il corrispondente elemento del globo geografico ds (ottenuto riducendo di una certa quantità la sferra terrestre) prende il nome di modulo di riduzione o di deformazione lineare (n). Quando n è uguale a 1, l'elemento di distanza ds non subisce alcuna deformazione con la sua rappresentazione sulla carta.
Per un più semplice e facile utilizzo da parte del pilota, anche durante le fasi di volo, alle carte aeronautiche viene richiesto di rispettare alcuni requisiti fondamentali quali:

- deve essere facile, avendo note le coordinate, individuare un punto sulla carta; oppure, al contrario, avendo individuato un punto sulla carta, si devono ottenere facilmente le sue coordinate. Ciò implica che i paralleli e i meridiani devono essere rappresentati da curve semplici o, ancora meglio, da delle rette di facile riproduzione;

- i percorsi principali di volo (lossodromia e ortodromia) devono essere il più possibile rettificati;
- si devono poter misurare con facilità e precisione sia gli angoli che le distanze tra più punti.

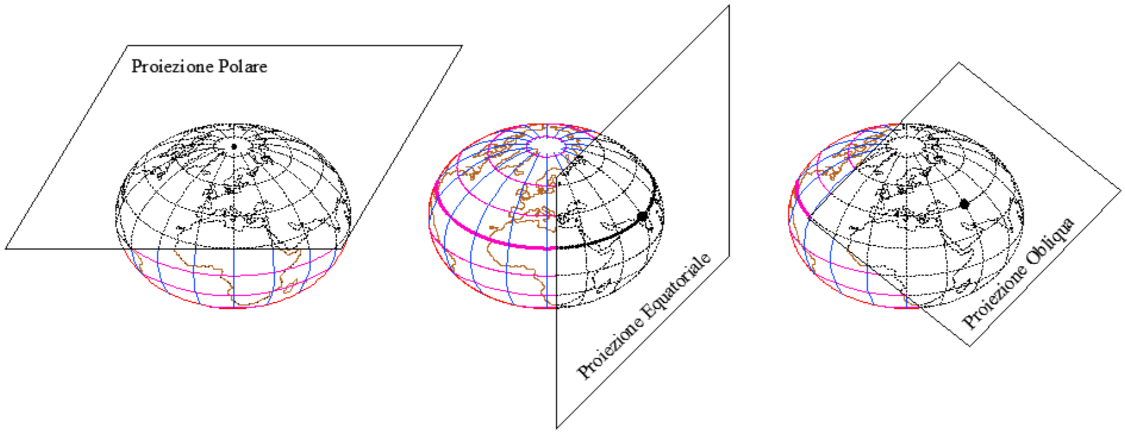
Si possono realizzare un'infinità di carte topografiche differenti, in funzione del tipo di superficie su cui vengono proiettate le informazioni del terreno e anche in base al punto di tangenza scelto. Ma, per quanto concerne l'ambito aeronautico, si utilizzano tre tipologie differenti di carte:

1) **A proiezioni prospettiche piane**. I punti della sfera vengono proiettati da un "punto di vista" direttamente su un piano (detto quadro) tangente alla sfera. In questo tipo di proiezioni il modulo di riduzione lineare è uguale a 1 soltanto nel punto di tangenza, che è l'unico punto in comune tra il piano e la sfera rappresentativa, mentre in tutti gli altri punti è maggiore di 1, perché questi vengono ingranditi rispetto alla sfera. Quindi, al fine di evitare deformazioni eccessive, la zona che viene rappresentata è sempre nelle immediate vicinanze del punto di contatto. Queste proiezioni si suddividono, in funzione della posizione del punto di vista, in:
   - **proiezioni ortografiche,** quando il punto di vista (PV) è all'infinito;
   - **proiezioni scenografiche,** quando il PV si trova a una distanza finita dalla superficie terrestre;
   - **proiezioni stereografiche,** quando il PV è posto esattamente sul lato opposto al punto di tangenza del piano;
   - **proiezioni gnomoniche o centrali,** quando il PV coincide con il centro della sfera rappresentativa.



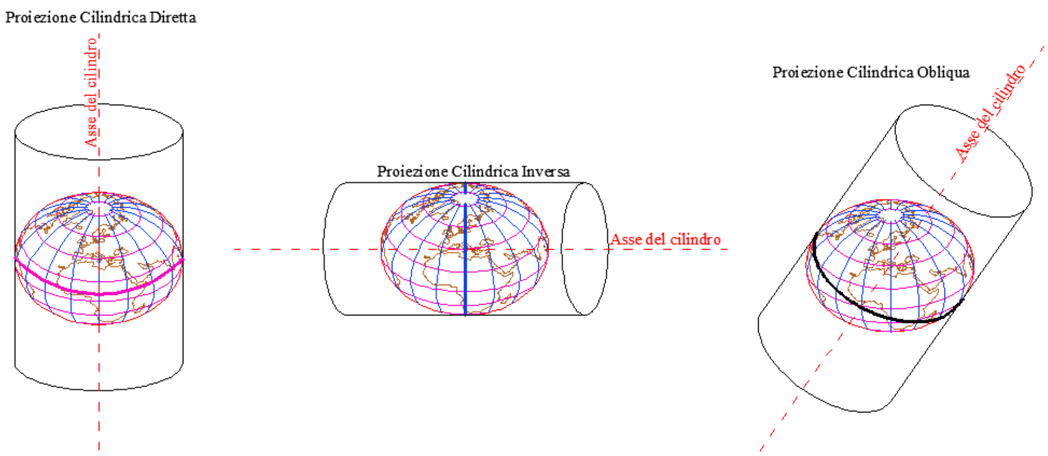
Un'ulteriore distinzione delle carte tiene conto della posizione in cui giace il piano di tangenza, che può essere:

- **polare,** quando il piano è tangente a uno dei poli;
- **equatoriale o meridiana,** quando il piano è tangente a un punto posto sull'equatore;
- **orizzontale o obliqua,** quando il piano è tangente in un punto qualsiasi, diverso da quelli precedenti.

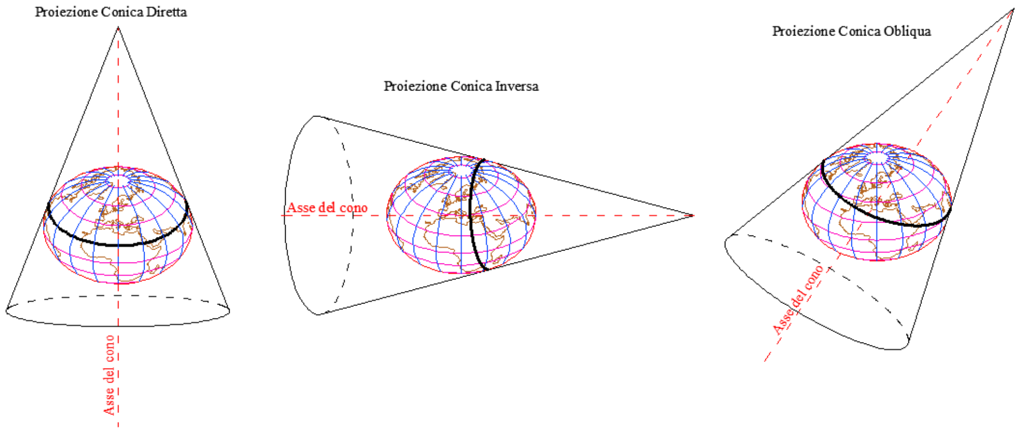


Dalla composizione delle due caratteristiche è possibile ottenere 12 diverse tipologie di carte, come ad esempio le proiezioni gnomoniche polari, le proiezioni ortografiche equatoriali, ecc.

2) **A proiezioni cilindriche**. I punti della sfera rappresentativa terrestre vengono proiettati, solo dal centro di essa, su un cilindro tangente alla sfera. Il modulo di riduzione è 1 lungo la circonferenza comune tra la sfera e il cilindro, mentre è maggiore di 1 in tutti gli altri punti, perché questi vengono ingranditi rispetto alla sfera. Qualora si scelga un cilindro secante (il suo raggio è più piccolo di quello della sfera terrestre), il modulo di riduzione avrà i seguenti valori: 1 lungo le due circonferenze di contatto; minore di 1 nella zona compresa tra le due circonferenze, perché le distanze tra i punti vengono ridotte; maggiore di 1 all'esterno delle superfici di contatto. Questa scelta consente di distribuire meglio le deformazioni sulla carta. Le proiezioni cilindriche si distinguono, in funzione del tipo di contatto tra la sfera e il cilindro, in:
   - **dirette,** quando l'asse del cilindro coincide con l'asse di rotazione terrestre;
   - **inverse o trasverse,** quando l'asse del cilindro giace sul piano equatoriale;
   - **oblique,** quando l'asse del cilindro ha una giacitura qualsiasi.



3) **A proiezioni coniche.** I punti della sfera terrestre rappresentativa vengono proiettati su un cono tangente alla sfera lungo una circonferenza. Il modulo di riduzione è 1 lungo la circonferenza comune tra la sfera e il cono, mentre è maggiore di 1 in tutti gli altri punti. Se si utilizza un cono secante, il modulo di riduzione avrà i seguenti valori: 1 lungo le due circonferenze di contatto; minore di 1 nella zona compresa tra le due circonferenze, perché le distanze tra i punti vengono ridotte; maggiore di 1 all'esterno delle superfici di contatto. Questa scelta consente di distribuire meglio le deformazioni sulla carta. Le proiezioni coniche si distinguono, in funzione del tipo di contatto tra la sfera e il cono, in:
   - **dirette,** quando l'asse del cono coincide con l'asse di rotazione terrestre;
   - **inverse o trasverse,** quando l'asse del cono giace sul piano equatoriale;
   - **oblique,** quando l'asse del cono ha una giacitura qualsiasi.



PROIEZIONE CILINDRICA DIRETTA TANGENTE

Nella proiezione cilindrica diretta tangente, il punto di proiezione è al centro della sfera e l'asse del cilindro coincide con l'asse di rotazione terrestre. Il modulo di deformazione lineare (n) è 1 lungo tutto l'equatore. I paralleli sono delle rette che hanno la stessa lunghezza dell'equatore e questo genera una deformazione sempre crescente all'aumentare della latitudine. I poli geografici non possono essere rappresentati; i meridiani sono delle rette ortogonali ai paralleli e sono tutti ugualmente distanziati tra loro. Infine, la distanza tra i paralleli e l'equatore cresce in relazione alla tangente della latitudine. Riferendoci a un sistema di assi cartesiani, si ottengono le seguenti relazioni, che legano le coordinate geografiche a quelle del sistema:

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cdot \lambda = \lambda \\ y &= r \cdot \tan\varphi = \tan\varphi \end{aligned}\right\} r = 1$$

Tale proiezione non è isogona, in quanto si hanno due moduli di riduzione lineare: uno per i meridiani e uno per i paralleli

$$n_{MERIDIANI} = \sec^2(\varphi) = \frac{1}{\cos^2(\varphi)}$$

$$n_{PARALLELI} = \sec(\varphi) = \frac{1}{\cos(\varphi)}$$

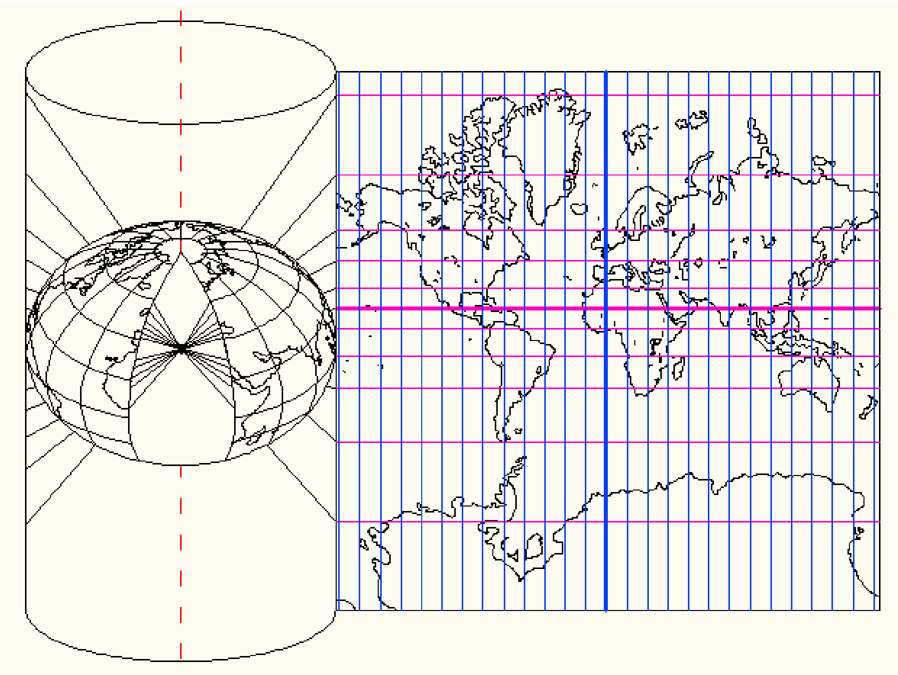
CARTA DI MERCATORE O CARTA CILINDRICA DIRETTA TANGENTE ISOGONA

La Carta di Mercatore è stata realizzata nel 1569 dal geografo fiammingo Kremer (noto come Mercatore). È una rielaborazione della carta cilindrica diretta tangente, che permette di rappresentare tutta la Terra. La differenza consiste nella tecnica di rappresentazione dei paralleli, che vengono disegnati in modo da rendere la carta isogona, ossia imponendo che $n_m = n_p = \sec\varphi$. In altre parole, affinché la carta sia isogona, gli archi di meridiano devono essere ampliati della stessa quantità dei paralleli, ottenendo:

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cdot \lambda = \lambda \\ y &= r \cdot \varphi_c = \varphi_c = 7915{,}7 \log \tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned}\right\} r = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{ds'}{dS} = \frac{n}{\frac{R}{r}} \\ \sigma_{Equatore} &= \frac{1}{\frac{R}{r}} \end{aligned}\right\} \sigma_{\varphi} = \sigma_{Equatore} \cdot n = \sigma_{Equatore} \cdot \sec(\varphi) = \sigma_{Equatore} \cdot \frac{1}{\cos(\varphi)}$$

Con φ_c (*fi* crescente) si calcola la distanza, espressa in primi, di un qualsiasi parallelo dall'Equatore. In questa particolare carta vi sono due scale: una costante per le longitudini; una variabile utilizzata per la misura delle latitudini e delle distanze. In generale, l'ortodromia si rappresenta con una curva che volge la concavità verso l'equatore, mentre la lossodromia con una retta. Dato che le deformazioni non sono eccessive in prossimità dell'equatore, tale carta è utilizzata per latitudini comprese tra 15°N e 15°S, in cui le variazioni sono inferiori al 3,5% e le ortodromie vengono rettificate.

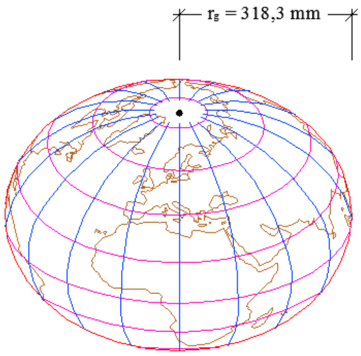


Esempio di carta di Mercatore. I meridiani sono equidistanti tra di loro, mentre la distanza tra i paralleli cresce man mano che ci si allontana dall'Equatore, aumentando così le dimensioni dei territori rappresentati.

Se si vuole ottenere una carta con minori deformazioni lineari nel tratto interessato, basta considerare il cilindro non più tangente all'equatore ma secante lungo due paralleli (che hanno lo stesso valore di latitudine, uno a Nord e l'altro a Sud) simmetrici rispetto all'equatore. Le relazioni di corrispondenza sono uguali a quelle della carta tangente moltiplicate per il cos φ (latitudine dei paralleli secanti). Tuttavia tale carta è di scarsa utilità, in quanto presenta le stesse deformazioni di quella classica.
Le procedure che permettono di disegnare una carta di Mercatore prevedono, per prima cosa, che si tracci il parallelo inferiore, da assumere come riferimento; in seguito, dopo aver fissato la scala delle longitudini (un primo di longitudine corrisponde a X mm), si procede disegnando i meridiani. Per tracciare i paralleli, bisogna calcolare le differenze di latitudine crescente tra il parallelo di riferimento e tutti gli altri paralleli che si vogliono rappresentare. Questi risultati si moltiplicano per il valore imposto alla scala delle longitudini, ottenendo così la distanza tra il parallelo di riferimento e quello cercato. Nelle carte in cui è rappresentato l'equatore, quest'ultimo viene scelto come parallelo di riferimento.

Esempio. Il raggio della sfera terrestre rappresentativa è posto uguale a 318,3 mm. Il candidato costruisca il reticolo di una carta di Mercatore tra le latitudini 0° e 20° N e tra le longitudini 0° e 30° E (di 10° in 10°). Rappresenti, inoltre, sulla carta, la retta che congiunge i punti A (Lat.=12° N, Long.=25°E) e B (Lat.=18°N, Long.=10°E) e spieghi a cosa corrisponde sulla sfera terrestre la detta congiungente. Infine, calcoli la scala equatoriale e le scale a 10° e 20° di latitudine.

Sfera rappresentativa (es. mappamondo)
di raggio r_g



Per prima cosa, si calcolano le coordinate cartesiane e le scale alle latitudini richieste. È bene ricordare che, nella carta di Mercatore, i meridiani sono delle rette verticali equidistanti tra loro, mentre i paralleli sono delle rette orizzontali. Inoltre, dato che l'equatore è il parallelo di tangenza con il cilindro, il modulo di riduzione (n) è 1 lungo tutta la circonferenza in comune tra la sfera e il cilindro. Sapendo che l'equatore è una circonferenza massima, si deduce che la lunghezza dell'arco di circonferenza di ampiezza angolare di 1' è 1 NM = 1.852 m = 1.852.000 mm.

$$\sigma_0 = \frac{n}{\frac{R}{r_g}} = \frac{1}{\frac{R}{r_g}} = \frac{1}{\frac{6371200000mm}{318,3mm}} = 1:20016337$$

$$\sigma_0 = \frac{d}{D} \rightarrow d = \sigma_0 \cdot D = \frac{1NM \cdot 1852000mm}{20016337} = 0,0925mm$$

Il valore ottenuto ci permette di capire che a una variazione angolare di 1' corrisponde una distanza sulla carta di 0,0925 mm. Se tale valore viene moltiplicato per 60, otteniamo la distanza relativa a 1° di variazione angolare, che è di 5,55 mm. Ciò ci consente di affermare che a una distanza sulla carta di 55,5 mm corrisponde un'apertura angolare λ di 10°. Quindi i meridiani da disegnare sono distanziati tra loro di 55,5 mm, mentre per i paralleli si deve procedere con il calcolo del valore dei φ_c (*fi* crescente) espresso in primi. Per ottenere la distanza dei vari paralleli a partire dall'Equatore, considerato che la carta di Mercatore è una carta isogona, si deve moltiplicare il valore del *fi* crescente per il coefficiente d.

$$\varphi_{c_{10}} = 7915,7 \cdot \lg[tg(45^\circ + \frac{\varphi_{10}}{2})] = 603' \qquad \varphi_{c_{12}} = 7915,7 \cdot \lg[tg(45^\circ + \frac{\varphi_{12}}{2})] = 725'$$

$$\varphi_{c_{18}} = 7915,7 \cdot \lg[tg(45^\circ + \frac{\varphi_{18}}{2})] = 1098' \qquad \varphi_{c_{20}} = 7915,7 \cdot \lg[tg(45^\circ + \frac{\varphi_{20}}{2})] = 1225'$$

$$y_{10} = \varphi_{c_{10}} \cdot d = 55,8mm \qquad y_{12} = \varphi_{c_{12}} \cdot d = 67,1mm$$

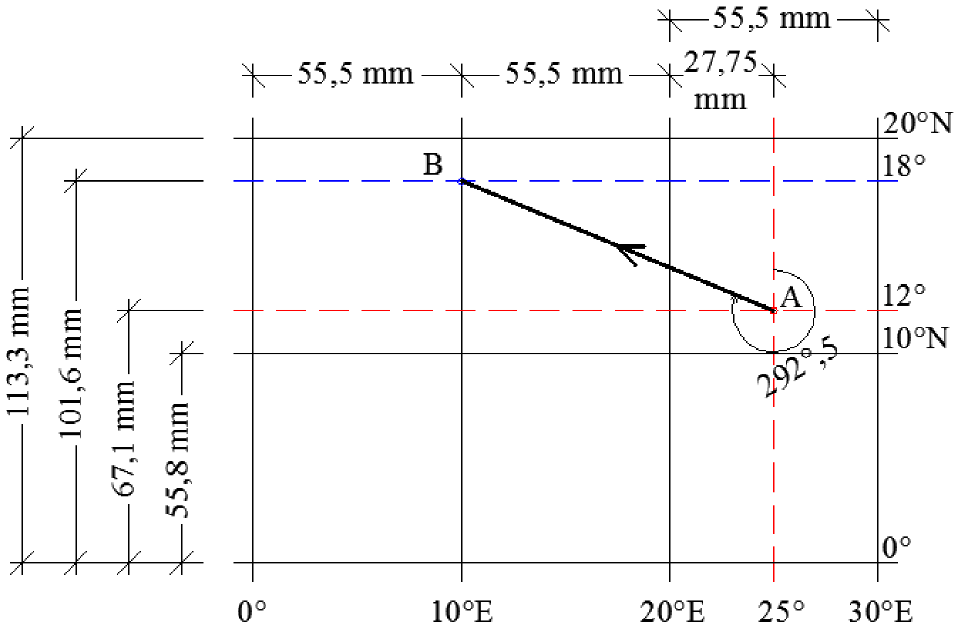
$$y_{18} = \varphi_{c_{18}} \cdot d = 101,6mm \qquad y_{20} = \varphi_{c_{20}} \cdot d = 113,3mm$$

Dopo aver calcolato il valore del modulo di riduzione a tali paralleli, si procede alla definizione della scala alle latitudini richieste, ricordando che il valore della scala va sempre espresso come 1:N.

$$n_{10}=\frac{1}{\cos\varphi_{10}}=1{,}015 \qquad n_{20}=\frac{1}{\cos\varphi_{20}}=1{,}064$$

$$\sigma_{10}=\frac{n_{10}}{\frac{R}{r_g}}=\frac{n_{10}}{20016337}=\frac{\frac{\cancel{n_{10}}}{\cancel{n_{10}}}}{\frac{20016337}{n_{10}}}=\frac{1}{\frac{20016337}{n_{10}}}=\frac{1}{\frac{20016337}{1{,}015}}=1:19720529$$

$$\sigma_{20}=\frac{n_{20}}{\frac{R}{r_g}}=\frac{n_{20}}{20016337}=\frac{\frac{\cancel{n_{20}}}{\cancel{n_{20}}}}{\frac{20016337}{n_{20}}}=\frac{1}{\frac{20016337}{n_{20}}}=\frac{1}{\frac{20016337}{1{,}064}}=1:18812347$$



La congiungente tra i due punti rappresenta il percorso lossodromico con una TC = 293°. Il valore della TC si può misurare direttamente sulla carta di Mercatore, visto che è isogona.

CARTA DI LAMBERT O CARTA CONICA DIRETTA TANGENTE ISOGONA

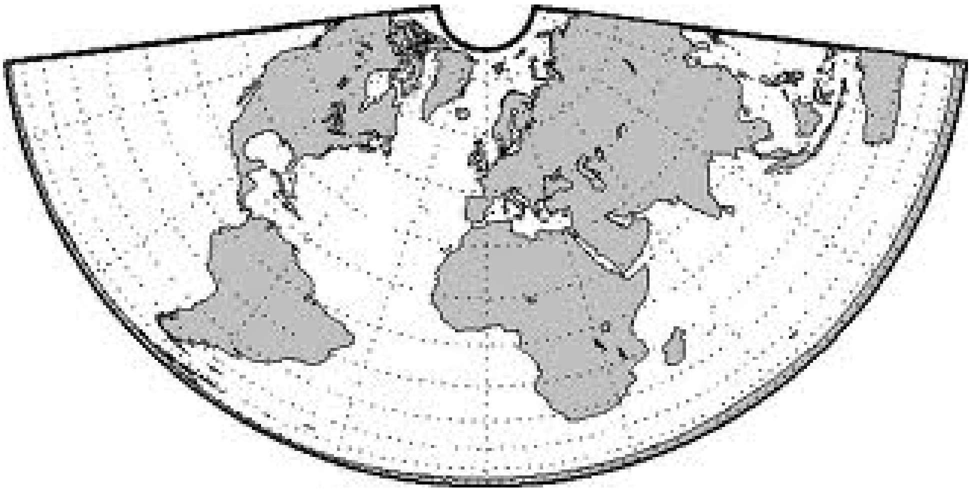
La Carta di Lambert è stata realizzata nel 1772 dal matematico e fisico Lambert (Mulhouse, Alsazia 1728 – Berlino 1777). È una particolare rappresentazione della carta conica diretta tangente, che consente di disegnare solo l'emisfero in cui giace il parallelo di tangenza. Il punto di proiezione è posto al centro della sfera e l'asse del cono coincide con l'asse di rotazione terrestre. Il modulo di deformazione lineare (n) è 1 lungo tutto il parallelo di tangenza. I meridiani si raffigurano con delle semirette, ugualmente distanziate tra loro di un angolo ω, convergenti in un punto detto vertice (uno dei poli), mentre i paralleli si rappresentano con degli archi aventi come origine il vertice. Le relazioni di corrispondenza si ottengono imponendo che il modulo di riduzione lineare lungo i paralleli sia uguale a quello lungo i meridiani, in modo da rendere isogona la carta.

$$n_m=n_p=\frac{k\cdot\rho_\varphi}{\cos(\varphi)}$$

Sfruttando questa condizione, le relazioni di corrispondenza diventano:

$$\omega = k \cdot \lambda$$
$$k = sen\left(\varphi_{tg}\right)$$
$$\rho_{\varphi} = \rho_e \cdot \left[\tan\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)\right]^k$$
$$\rho_e = \frac{\cos\varphi_{tg}}{k \cdot \left[\tan\left(45^\circ - \frac{\varphi_{tg}}{2}\right)\right]^k}$$

Si consideri che il valore del raggio equatoriale (ρ_e) è espresso in radianti, quindi, per trasformarlo in distanza, si deve moltiplicare per il raggio della sfera rappresentativa (r_g).
Dal momento che le deformazioni non sono eccessive (inferiori al 3,5%) in prossimità del parallelo di tangenza, tale carta viene utilizzata per rappresentare le porzioni di Terra comprese nell'intervallo di ± 15° del valore di tangenza. Le ortodromie si rappresentano con una retta e, solo se si considerano dei piccoli tratti, la lossodromia è assimilabile a una retta, il cui valore di TC può essere calcolato nel punto medio.



Esempio di carta di Lambert.

Se si vuole aumentare la precisione della carta, è sufficiente considerare il cono secante lungo due paralleli (definiti standard), perché in questo modo il modulo di riduzione avrà i seguenti valori: 1 lungo i due paralleli standard; minore di 1 nell'intervallo tra i due paralleli; maggiore di 1 al di là degli stessi. Ciò implica che le relazioni di corrispondenza debbano essere opportunamente modificate, anche se si può ipotizzare che la sfera rappresentativa si riduca di una quantità tale da diventare tangente al cono e non più secante. Con questa modifica, dato che il nuovo raggio della sfera risulterà sicuramente più piccolo rispetto a quello rappresentativo, per ottenere il nuovo modulo di riduzione lineare, bisognerà moltiplicare quello precedente per una costante, data dal rapporto dei due raggi della sfera (raggio nuovo diviso raggio rappresentativo), il cui valore è sempre minore di 1. Ma, cambiando il modulo di riduzione lineare, si dovranno modificare anche tutte le formule che ci permettono di calcolare le relazioni di corrispondenza mediante le quali poter disegnare i meridiani e i paralleli. Le nuove relazioni di corrispondenza per la **Carta di Lambert Secante** sono:

$$n_0 = \frac{r'}{r_g} \qquad n = \frac{k \cdot \rho}{\cos(\varphi)} \cdot n_0$$

$$k = \frac{\log\left[\cos(\varphi_{S1})\right] - \log\left[\cos(\varphi_{S2})\right]}{\log\left[tg\left(45° - \frac{\varphi_{S1}}{2}\right)\right] - \log\left[tg\left(45° - \frac{\varphi_{S1}}{2}\right)\right]}$$

$$\omega = k \cdot \lambda$$

$$\rho_\varphi = n_0 \cdot \rho_e \cdot \left[\tan\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)\right]^k = \rho_e^{'} \cdot \left[\tan\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)\right]^k$$

$$\rho_e^{'} = \frac{\cos\varphi_{S1}}{k \cdot \left[\tan\left(45^\circ - \frac{\varphi_{S1}}{2}\right)\right]^k} = \frac{\cos\varphi_{S2}}{k \cdot \left[\tan\left(45^\circ - \frac{\varphi_{S2}}{2}\right)\right]^k}$$

Si consideri che: con φ_{S1} si intende il valore del parallelo standard alla quota più bassa, mentre con φ_{S2} si intende in valore del parallelo standard alla quota più alta. Se tra tali paralleli vi è una differenza minore o uguale a 10°, la formula per il calcolo della costante di convergenza (k) può essere semplificata con il seno della latitudine media tra i due paralleli standard.

$$\text{se } \Delta\varphi_S = \varphi_{S2} - \varphi_{S1} \leq 10° \text{ allora } k = sen(\varphi_{SM}) \text{ con } \varphi_{SM} = \frac{\varphi_{S1} + \varphi_{S2}}{2}$$

Esempio. Il raggio equatoriale su una carta conica isogona, tangente lungo il parallelo 60° N, ha una lunghezza di 300 mm. Si ricavi la scala della carta lungo i paralleli 50° N e 70° N e si disegni il reticolo relativo ai paralleli 50°, 60° e 70° N e ai meridiani 0°, 10°, 20°, 30° E e W (si assuma come raggio della sfera terrestre 6370 km).

Per prima cosa, è bene ricordare che la carta conica tangente isogona rappresenta la carta di Lambert e che, in questo caso, invece del raggio della sfera rappresentativa (r_g) ci viene fornito il valore del raggio equatoriale (ρ_e) già espresso in mm. Questo ci permette di capire che ρ_e è stato moltiplicato per r_g, perché altrimenti il suo valore sarebbe stato in radianti. Grazie a questo ragionamento è possibile calcolare il raggio della sfera rappresentativa tramite formula inversa:

$$k = sen(\varphi_{tg}) = sen(60^\circ) = 0{,}866$$

$$\rho_e = \frac{\cos(\varphi_{tg})}{k \cdot \left[\tan\left(45^\circ - \frac{\varphi_{tg}}{2}\right)\right]^k} = \frac{\cos(60^\circ)}{0{,}866 \cdot \left[\tan\left(45^\circ - \frac{60^\circ}{2}\right)\right]^{0{,}866}} = 1{,}806 rad \cdot r_g = 300 mm$$

$$r_g = \frac{300}{1{,}806} = 166{,}1 mm$$

A questo punto, con le seguenti formule, si potrà calcolare la scala lungo i paralleli richiesti, ricordando che lungo il parallelo di tangenza n = 1:

$$\sigma_{60^\circ} = \frac{n}{\frac{R}{r_g}} = \frac{1}{\frac{6.370.000.000mm}{166,1mm}} = 1:38.350.391$$

$$n_{50^\circ} = k \cdot \rho_{eq} \cdot \frac{\left[\tan\left(45^\circ - \frac{\varphi_{50^\circ}}{2}\right)\right]^k}{\cos(\varphi_{50^\circ})} = 1,014 \qquad n_{70^\circ} = k \cdot \rho_{eq} \cdot \frac{\left[\tan\left(45^\circ - \frac{\varphi_{70^\circ}}{2}\right)\right]^k}{\cos(\varphi_{70^\circ})} = 1,017$$

$$\sigma = \frac{n}{\frac{R}{r_g}} = \frac{1}{\frac{38.350.391}{n}} \Rightarrow \sigma_{50^\circ} = 1:37.820.898 \qquad \sigma_{70^\circ} = 1:37.709.332$$

Infine, si potranno definire i valori dei ρ, che rappresentano i valori dell'apertura di compasso che ci permetteranno di disegnare i vari paralleli, e di ω per un intervallo di 10°:

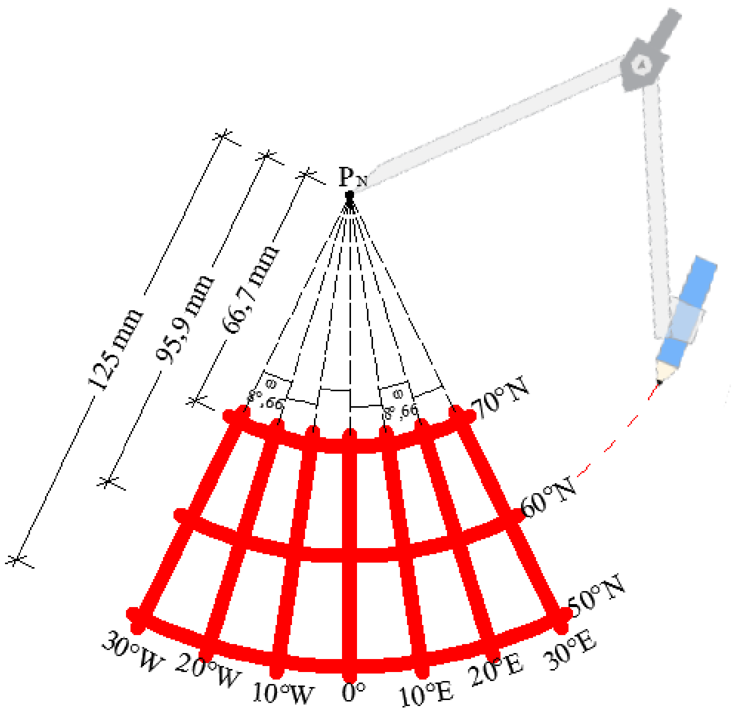
$$\rho_{70} = \rho_e \cdot \left[\tan\left(45^\circ - \frac{\varphi_{70}}{2}\right)\right]^k = 66,7mm \qquad \rho_{50} = \rho_e \cdot \left[\tan\left(45^\circ - \frac{\varphi_{50}}{2}\right)\right]^k = 125mm$$

$$\rho_{60} = \rho_e \cdot \left[\tan\left(45^\circ - \frac{\varphi_{60}}{2}\right)\right]^k = 95,9mm$$

$$\omega_{0^\circ} = \lambda_0 = 0^\circ \qquad \omega_{10^\circ} = k \cdot \lambda_{10^\circ} = 8^\circ,7$$
$$\omega_{20^\circ} = k \cdot \lambda_{20^\circ} = 17^\circ,3 \qquad \omega_{30^\circ} = k \cdot \lambda_{30^\circ} = 26^\circ$$

In verità, i valori a 20° e a 30° di ω dovrebbero essere dei multipli di quello a 10°. Perché ciò si verifichi, basterà aumentare i valori dei decimali:

$$\omega_{0^\circ} = \lambda_0 = 0^\circ \qquad \omega_{10^\circ} = k \cdot \lambda_{10^\circ} = 8^\circ,66$$
$$\omega_{20^\circ} = k \cdot \lambda_{20^\circ} = 17^\circ,32 \qquad \omega_{30^\circ} = k \cdot \lambda_{30^\circ} = 25^\circ,98$$

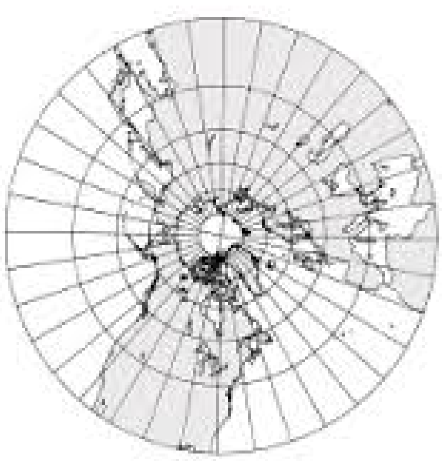


CARTA STEREOGRAFICA POLARE
La Carta Stereografica Polare ha il punto di vista (o di proiezione) posto su uno dei poli, mentre il quadro di proiezione è costituito da un piano tangente al polo diametralmente opposto al punto di vista. È una carta isogona, all'interno della quale: i meridiani si rappresentano con delle semirette tutte uscenti dal vertice, che è il polo di tangenza, e conservano lo stesso valore angolare della sfera terrestre; i paralleli si rappresentano con delle circonferenze di raggio ρ e il valore del raggio equatoriale è pari al doppio di quello della sfera rappresentativa; l'unico emisfero rappresentabile è quello del polo di tangenza. Questa carta è molto precisa in prossimità dei poli e per questo motivo è spesso impiegata per effettuare i voli nelle zone polari. In questi casi, le relazioni di corrispondenza da utilizzare sono:

$$n = \frac{1}{\cos^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$\omega = \lambda$$

$$\rho = 2 \cdot tg\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot r_g$$



È bene precisare che, a livello di resa visiva, la carta stereografica polare è simile alla carta gnomonica polare dove, però, la distanza tra i paralleli aumenta molto più rapidamente.

<u>*Esempio*</u>. Il candidato costruisca una carta stereografica polare a partire dalla latitudine 84° N avente su detto parallelo scala 1/5.000.000 nell'ipotesi di Terra sferica avente raggio 6370 km e calcoli il valore della scala nel punto di tangenza.
Il primo passo è quello di ricavare il raggio della sfera rappresentativa (r_g) sfruttando la formula inversa della scala. Quindi si procede con il calcolo dei raggi dei paralleli 84° 86° 88°. Per quanto riguarda i meridiani, si disegnano tutti con un intervallo di 20° a partire da quello fondamentale.

$$n_{84^\circ} = \frac{1}{\cos^2\left(45^\circ - \frac{\varphi_{84^\circ}}{2}\right)} = \frac{1}{\cos^2\left(45^\circ - 42^\circ\right)} = 1,0027$$

$$\sigma_{84^\circ} = 1:5.000.000 = \frac{1}{5.000.000} = \frac{n_{84^\circ}}{\frac{R}{r_g}} \rightarrow \frac{R}{r_g} = \frac{5.000.000}{n_{84^\circ}} \rightarrow r_g = \frac{R \cdot n_{84^\circ}}{5.000.000}$$

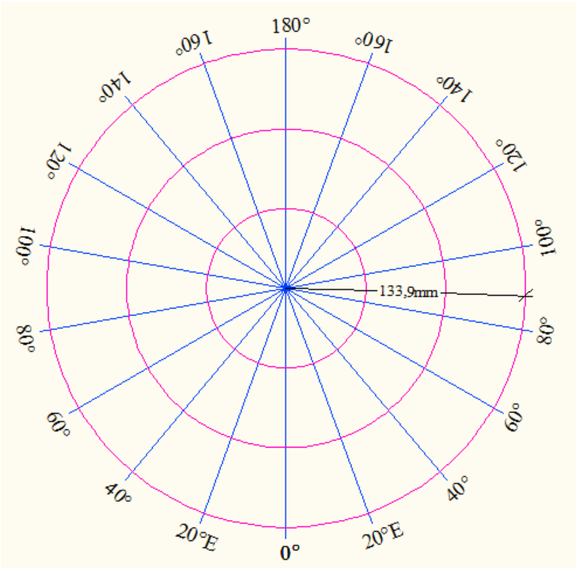
$$r_g = \frac{R \cdot n_{84^\circ}}{5.000.000} = \frac{6.370.000.000 \cdot 1,0027}{5.000.000} = 1277,5mm$$

$$\omega = \lambda$$

$$\rho_{84°} = 2 \cdot tg\left(45^{\circ} - \frac{\varphi_{84°}}{2}\right) \cdot r_g = 2 \cdot tg\left(45° - 42°\right) \cdot 1277,5mm = 133,9mm$$

$$\rho_{86°} = 2 \cdot tg\left(45^{\circ} - \frac{\varphi_{86°}}{2}\right) \cdot r_g = 2 \cdot tg\left(45° - 43°\right) \cdot 1277,5mm = 89,2mm$$

$$\rho_{88°} = 2 \cdot tg\left(45^{\circ} - \frac{\varphi_{88°}}{2}\right) \cdot r_g = 2 \cdot tg\left(45° - 44°\right) \cdot 1277,5mm = 44,6mm$$



CARTA GNOMONICA POLARE

La Carta Gnomonica Polare ha il punto di vista (o di proiezione) posto al centro della Terra, mentre il quadro di proiezione è costituito da un piano tangente posto su uno dei due poli. Non è una carta isogona, per cui all'interno di essa: i meridiani si rappresentano con delle semirette tutte uscenti dal vertice, che è il polo di tangenza, e conservano lo stesso valore angolare della sfera terrestre; i paralleli si rappresentano con delle circonferenze di raggio ρ, ma non si può rappresentare l'Equatore perché il suo valore tende a infinito; l'unico emisfero rappresentabile è quello del polo di tangenza; le ortodromie vengono rettificate. Questa carta è molto precisa e, rispetto a quella stereografica, offre un maggiore dettaglio in prossimità dei poli. Per questo motivo viene adoperata spesso per effettuare i voli nelle zone polari, utilizzando come relazioni di corrispondenza le seguenti:

$$n_m \neq n_p$$

$$n_m = \frac{1}{sen^2(\varphi)}; \qquad n_p = \frac{1}{sen(\varphi)}$$

$$\omega = \lambda$$

$$\rho = \cot g(\varphi) \cdot r_g$$

__Esempio__. Si rappresentino, su una proiezione gnomonica polare costruita per una sfera rappresentativa terrestre di raggio r_g = 100mm, le seguenti coordinate:

Halifax (Lat = 44° 36'.0 N; Long = 63° 45'.0 W);

Londra (Lat = 51° 30'.0 N; Long = 00° 00'.0).

Si rappresenti, inoltre, il percorso ortodromico tra i due punti.

In questo particolare caso, dato che i punti hanno una differenza di longitudine di soli 64°, può risultare più agevole rappresentare solo una porzione del reticolato della carta tra 10° E e 75° W. In questo modo i paralleli saranno rappresentati da semplici archi di circonferenza di raggio ρ.

$$\omega_H = \lambda_H = 63°45'; \qquad \omega_L = \lambda_L = 0°00'$$

$$\rho_H = \cot g\left(\varphi_H\right)\cdot r_g = \frac{1}{tg\left(44°36'\right)}\cdot 100mm = 101,4mm$$

$$\rho_L = \cot g\left(\varphi_L\right)\cdot r_g = \frac{1}{tg\left(51°30'\right)}\cdot 100mm = 79,5mm$$

Per rendere più semplice la lettura della carta, si disegnano anche i paralleli 50° 60° 40° e i meridiani 30°W e 60°W

$$\rho_{40°} = \cot g\left(\varphi_{40°}\right)\cdot r_g = \frac{1}{tg\left(40°00'\right)}\cdot 100mm = 119,2mm$$

$$\rho_{50°} = \cot g\left(\varphi_{50°}\right)\cdot r_g = \frac{1}{tg\left(50°00'\right)}\cdot 100mm = 83,9mm$$

$$\rho_{60°} = \cot g\left(\varphi_{60°}\right)\cdot r_g = \frac{1}{tg\left(60°00'\right)}\cdot 100mm = 57,7mm$$