

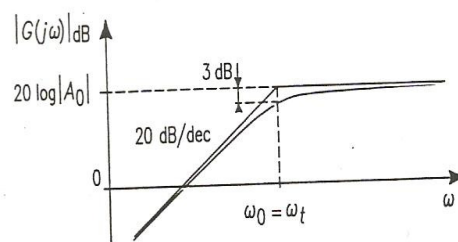
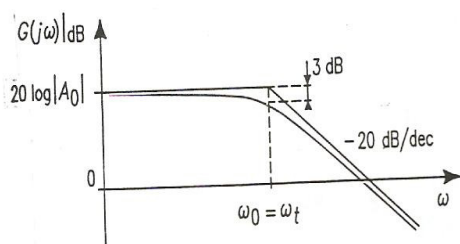
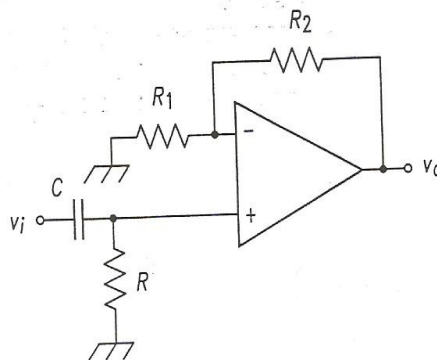
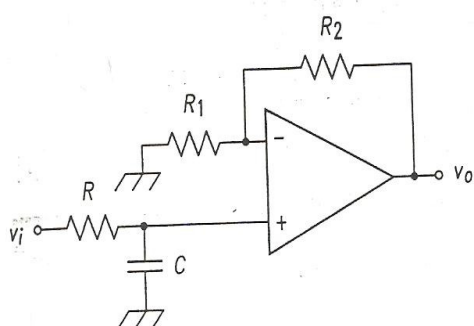
LUCIANO TRAPA

febbraio 2012

**FILTRI ATTIVI:
CLASSIFICAZIONE E APPROCCIO
SEMPLIFICATO AL PROGETTO**

I FILTRI ATTIVI DEL PRIMO ORDINE

Un filtro attivo del primo ordine (passaBASSO o passaALTO) può essere realizzato collegando, all'ingresso di un amplificatore NON invertente con operazionale, una cella filtrante passiva (passaBASSO o passaALTO) a resistenza e capacità.



Nella parte **sinistra** della figura: il filtro **passaBASSO** (n alto lo schema circuitale, in basso il modulo della risposta in frequenza).

Nella parte **destra** della figura: il filtro **passaALTO** (n alto lo schema circuitale, in basso il modulo della risposta in frequenza).

Si sceglie l'amplificatore NON invertente (invece di quello invertente) perché presenta un'impedenza di ingresso più elevata e quindi carica meno il filtro passivo, non alterandone, fra l'altro, la frequenza di taglio.

Detta R la resistenza del filtro passivo e dette R_1 ed R_2 i resistori della rete di reazione negativa dell'amplificatore ad operazionale, si ha, come in un normale filtro passivo:

ω_t = pulsazione di taglio = pulsaz. del polo

$$\omega_t = \frac{1}{R \cdot C}$$

La frequenza di taglio si ottiene dividendo per 2π la ω_t :

$$f_t = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}$$

L'amplificazione A_0 in banda passante è quella dell'amplificatore NON invertente ad operazionale:

A_0 = amplificaz ione in banda passante

$$A_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

CLASSIFICAZIONE E PROGETTO DEI FILTRI: INTRODUZIONE

I filtri possono essere classificati in base ad almeno cinque criteri, che verranno elencati qui di seguito:

*1. In base alla **PRESENZA**, o meno, di un **COMPONENTE ATTIVO***

I filtri possono essere suddivisi in **ATTIVI** e **PASSIVI**. I filtri attivi contengono almeno un componente attivo, tipicamente un amplificatore operazionale, in grado di accrescere la potenza del segnale di ingresso e di rendere molto elevata l'impedenza di ingresso, in modo da rendere indipendente (nel caso di filtro realizzato con più celle filtranti in cascata) la progettazione di una cella.

*2. In base al **TIPO DI AZIONE FILTRANTE**: **passaBASSO**¹, **passaALTO**, **passaBANDA**, **eliminaBANDA** (o a reiezione di banda o notch)*

Classificare in base al **TIPO DI AZIONE FILTRANTE** significa classificare in base al **posizionamento**, sull'asse della frequenza, della **banda passante** della risposta in frequenza asintotica o linearizzata.

*3. In base all'**ORDINE** “N” del filtro*

L'ordine è il **grado massimo** della **variabile “s”** al **denominatore** della funzione di trasferimento

$$G(s) = \text{Num}(s) \div \text{Den}(s) ;$$

l'ordine N coincide² anche col **numero di poli di G(s)**, cioè col numero di **radici del denominatore Den(s)**, ossia col numero di valori di s che soddisfano l'equazione **Den(s)=0**

*Possono essere del primo ordine solo i filtri **passaBASSO** e **passaALTO**.*

Invece i filtri **passaBANDA ed **eliminaBANDA** devono essere almeno del secondo ordine.**

1 Il **passaBASSO** è anche chiamato **LPF** (Low Pass Filter)
Il **passaALTO** è anche chiamato **HPF** (High Pass Filter)
Il **passaBANDA** è anche chiamato **BPF** (Band Pass Filter)

2 All'aumentare dell'ordine N del filtro cresce (di 20 dB/decade per ogni grado di aumento di N) la pendenza dei fianchi della curva del modulo della risposta in frequenza, determinando una migliore discriminazione fra banda passante e banda oscura.

4. In base alla **TOPOLOGIA**, ossia alla “**STRUTTURA**” del circuito filtrante

Le topologie fondamentali sono:

- ⤴ **Sallen-key**³ o **VCVS**⁴
- ⤴ **a reazione (negativa) multipla**⁵
- ⤴ **a variabili di stato (filtro universale)**⁶

La topologia potrebbe essere definita come **il modo in cui i condensatori e le resistenze del circuito filtrante vengono collegati fra loro.**

-
- 3 La topologia di **Sallen-key o VCVS** è caratterizzata dalla presenza di **una linea di retroazione negativa** e da **una linea di retroazione positiva**.

Questa topologia è particolarmente **adatta alla realizzazione** di filtri **passaBASSO** e **passaALTO** e anche di filtri costruiti utilizzando **passaBASSO** e **passaALTO** e cioè:

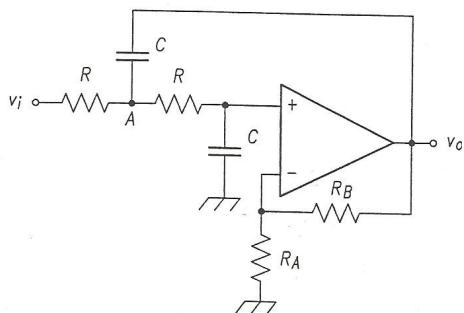
- di filtri **passaBANDA a banda larga**, ottenibili come **cascata** di un **LPF** e di un **HPF**, avente, quest'ultimo, **frequenza di taglio più bassa di quella dell'LPF**
- di **filtri eliminaBANDA**, a banda oscura larga, realizzabili mediante la **somma** di un LPF e di un HPF, avente, quest'ultimo, frequenza di taglio più alta di quella dell'LPF. La somma viene implementata da un circuito sommatore ad operazionale che somma le uscite dell'LPF e dell'HPF.

- 4 Voltage Controlled – Voltage Source (cioè filtri con ingresso in tensione e controllati in tensione)

- 5 La topologia **a reazione (negativa) multipla** è particolarmente adatta alle realizzazione di filtri **passabanda a banda stretta** in un **unico stadio del secondo ordine**. E' adatta in oltre alla realizzazione di filtri **eliminabanda**, **a banda oscura stretta**, utilizzando un **passabanda** e un **sommatore** o un **sottrattore** ad operazionale.

- 6 La topologia **a variabili di stato (filtro universale)** è basata su un **sommatore** seguito da **due integratori** che permettono di ottenere una risposta di tipo **passaBASSO, passaALTO, passaBANDA a seconda di dove viene prelevato il segnale di uscita**. Sono in commercio filtri universali integrati.

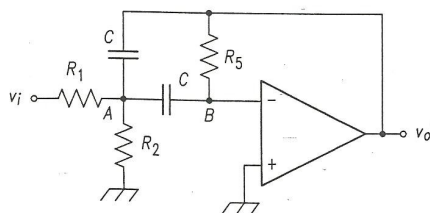
LE DIVERSE TOPOLOGIE



Filtro passaBASSO del SECONDO ordine di Sallen- Key o VCVS

(versione SEMPLIFICATA a COMPONENTI UGUALI)

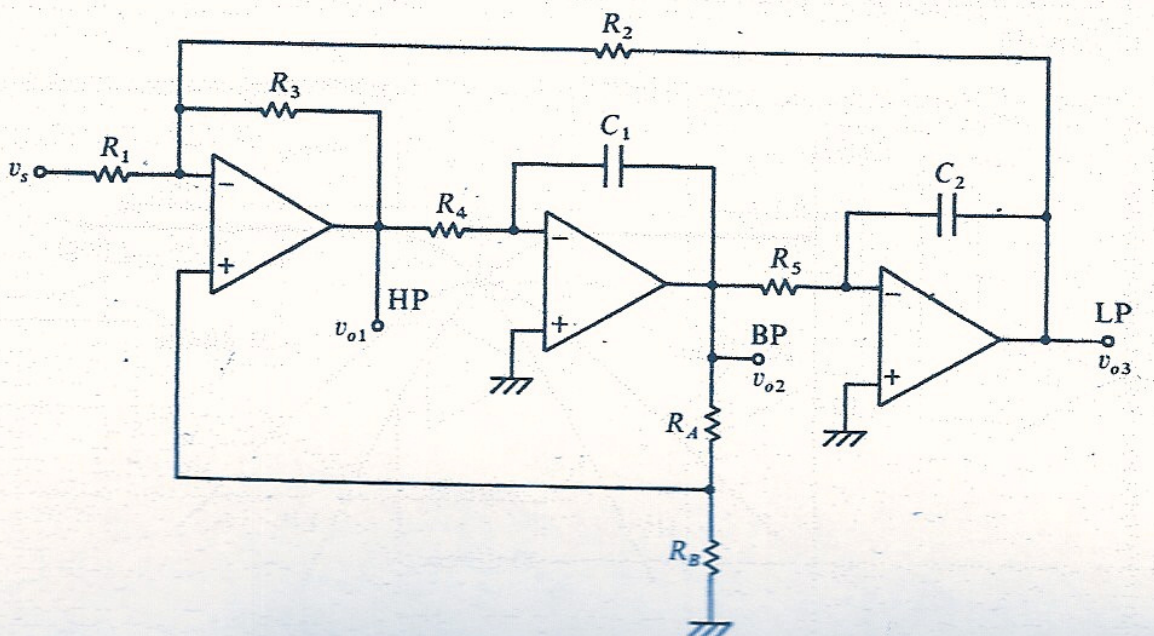
Il passaALTO si ottiene invertendo di posto le R con le C (escluse naturalmente R_A ed R_B)



Filtro passaBANDA a banda STRETTA, invertente, del SECONDO ordine

A REAZIONE MULTIPLA

(versione SEMPLIFICATA a CAPACITA' UGUALI)



Se $R_1 = R_2 = R_3 = R_0$ e $C_1 = C_2 = C$ e inoltre $R_4 = R_5 = R$, si ha un filtro a guadagno unitario

FILTRO ATTIVO UNIVERSALE O A VARIABILI DI STATO

5. ***DISTINZIONE IN FILTRI DI BUTTERWORTH, DI CHEBICHEV, DI BESSEL (O DI THOMPSON)***⁷

Questa distinzione (valida solo per i filtri di **ordine superiore al primo**) viene effettuata in base alla **forma** del **DIAGRAMMA EFFETTIVO** del modulo e della fase della **risposta in frequenza**, forma che è legata al valore del **FATTORE⁸ DI SMORZAMENTO “ ζ ”** (detto anche “ ξ ”). Abbiamo precisato che questa classificazione si basa sui diagrammi effettivi e non su quelli asintotici perché sia i filtri di Butterworth, sia quelli di Chebichev, sia quelli di Bessel hanno diverse risposte effettive, ma la stessa risposta asintotica o linearizzata.

7 Esistono anche i filtri di Cauer o filtri ellittici.

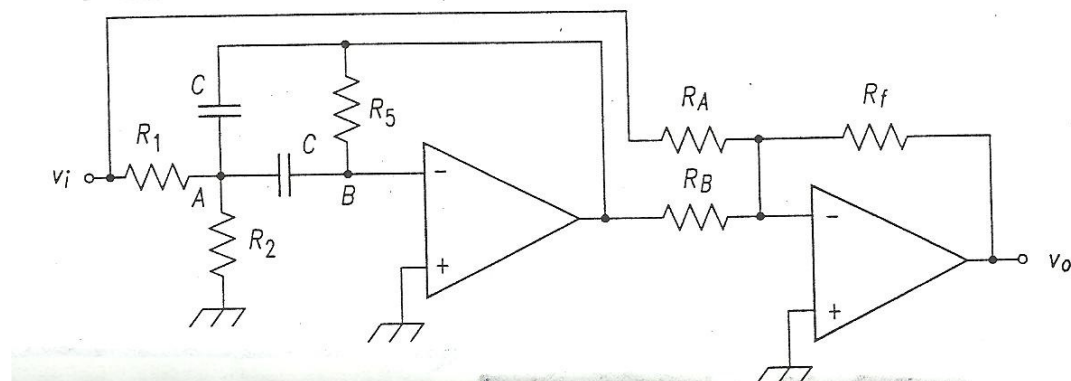
8 Il fattore di smorzamento, indicato con le lettere greche ζ (zeta) oppure ξ (csi), è presente nell'espressione matematica della risposta in frequenza e della funzione di trasferimento in “s”.

ζ (sempre minore o uguale a 1) **quantifica l'attitudine** del filtro a **smorzare**, cioè ad attenuare, le **oscillazioni nella risposta temporale ad un segnale a gradino**.

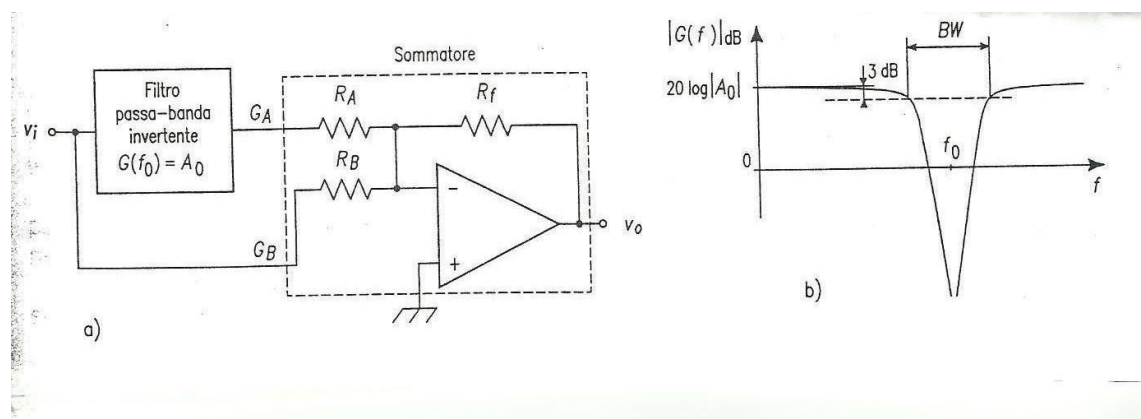
$\zeta = -\cos(\varphi)$, cioè ζ rappresenta anche il coseno, col segno cambiato, dell'angolo di fase della coppia di poli complessi coniugati, che caratterizzano il denominatore della funzione di trasferimento in s, denominatore che assume in tutti i filtri del secondo ordine, la forma di “termine trinomio”.

USO DEI SOMMATORI O SOTTRATTORI NEI FILTRI ATTIVI

Filtro ELIMINAbanda
(a banda oscura stretta)
A REAZIONE MULTIPLA
con SOMMATORE INVERTENTE



Schema circuitale



- a) Schema semplificato
b) Modulo della risposta in frequenza

**FILTRO PASSABANDA A BANDA LARGA
COME CASCATA (PRODOTTO DELLE RISPOSTE)
DI UN LPF E DI UN HPF
di SALLEN-KEY o VCVS**

La frequenza di taglio dell'HPF deve essere minore di quella dell'LPF

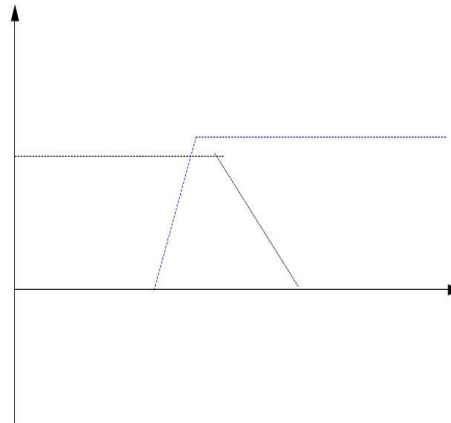
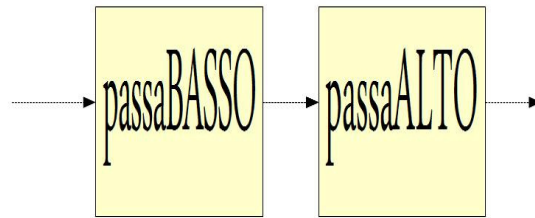
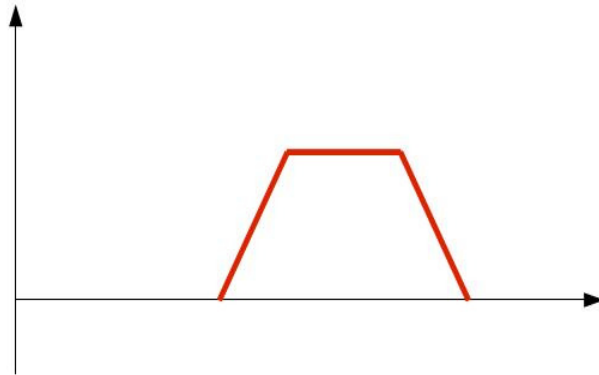


Figura in alto: schema a blocchi della cascata dei due filtri

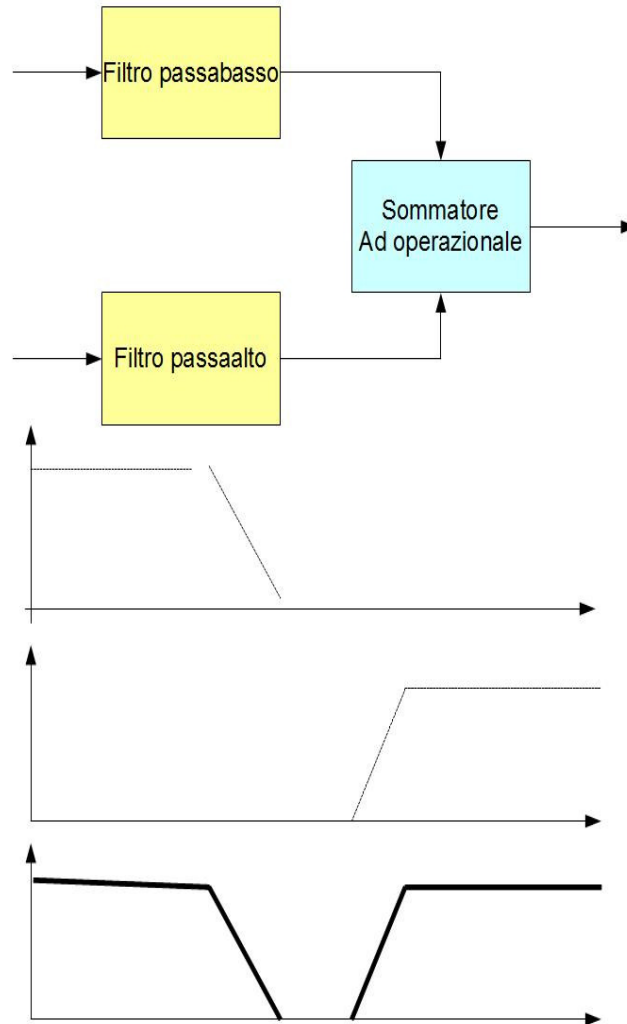
Figura in basso: essendo i due filtri in cascata, le risposte si moltiplicano fra loro

**FILTRO PASSABANDA A BANDA LARGA
COME CASCATA (PRODOTTO DELLE RISPOSTE)
DI UN LPF E DI UN HPF
di SALLEN-KEY o VCVS**

Nella figura seguente è rappresentato il risultato del prodotto delle risposte passabasso e passaalto, che è appunto una risposta di tipo passabanda



**FILTRO elimina BANDA A BANDA LARGA COME SOMMA (SOMMA DELLE RISPOSTE)
DI UN LPF E DI UN HPF
di SALLEN-KEY o VCVS**



La frequenza di taglio dell'HPF deve essere maggiore di quella dell'LPF

Dall'alto verso il basso sono raffigurati:

- ⤴ lo schema a blocchi complessivo del filtro eliminabanda o notch
- ⤴ il modulo della risposta in frequenza del solo filtro passabasso
- ⤴ il modulo della risposta in frequenza del solo filtro passaalto
- ⤴ la SOMMA delle risposte dei singoli filtri componenti, somma che è la risposta del filtro "complessivo" eliminaBANDA

APPROCCIO AL **PROGETTO** DI UN FILTRO ATTIVO DEL SECONDO ORDINE

Il progetto consiste sostanzialmente nella SCELTA DELLA TOPOLOGIA IN BASE ALL'AZIONE FILTRANTE CHE CI VIENE RICHIESTA E IN BASE, EVENTUALMENTE, ALLA FORMA DELLA RISPOSTA EFFETTIVA

In base all'AZIONE FILTRANTE che ci viene richiesta (passaBASSO, passaALTO, passaBANDA a banda larga o stretta, Notch), **scegliamo** la **TOPOLOGIA**, o **STRUTTURA CIRCUITALE** più adeguata (**Sallen-Key o VCVS**, topologia a **reazione multipla**, topologia a **variabili di stato**)

- ⤴ Se l'azione filtrante richiesta è **passaBASSO** o **passaALTO** possiamo usare la **topologia di Sallen-Key o VCVS**, nella sua **forma semplificata** “a **componenti uguali**” usando le relazioni relative alla procedura di progetto semplificato (di pag. 14) e la **tabella della pagina seguente** che ci fornisce i parametri che permettono di effettuare la scelta della forma della risposta effettiva, ossia l'approssimazione della risposta (filtro BUTTERWORTH, CHEBICHEV o BESSEL) che ci è stata richiesta o che riteniamo più opportuna.

La stessa cosa possiamo fare se ci sono richieste azioni filtranti di tipo **passaBANDA a banda LARGA** o **eliminaBANDA a banda larga** in quanto questi filtri possono essere realizzati sfruttando il passabasso e il passaalto di Sallen-Key.

In particolare un passaBANDA a banda LARGA può essere realizzato (come nelle figure a pag. 9 e 10 di questo capitolo) collegando in CASCATA un LPF e un HPF (con l'HPF caratterizzato da frequenza di taglio minore di quella dell'LPF, in modo che il PRODOTTO delle risposte sia proprio di tipo passabanda).

L'eliminabanda a banda oscura largavinvece può essere ottenuto (come nella figura a pag. 11 di questo capitolo) sommando, con un sommatore ad operazionale, l'uscita di un LPF e l'uscita di un HPF (con l'HPF caratterizzato da frequenza di taglio maggiore di quella dell'LPF, in modo che la SOMMA delle risposte sia proprio di tipo eliminabanda)
- ⤴ Se l'azione filtrante è di tipo **passabanda a banda STRETTA**, possiamo utilizzare la topologia **a reazione multipla**, nella sua versione **semplificata** a **capacità uguali**, che **NON richiede** la scelta della **forma della risposta effettiva** (filtro BUTTERWORTH, CHEBICHEV o BESSEL).

Usiamo in tal caso le relazioni (di pag. 16) per il progetto semplificato di un filtro passabanda invertente del second'ordine a banda stretta.

La stessa cosa si fa se ci è richiesta un'azione filtrante **eliminabanda a banda oscura stretta**, aggiungendo (come nella figura a pag. 8 di questo fascicolo), all'uscita del passabanda a banda STRETTA, un sommatore ad operazionale che sottrae il segnale che ha subito il filtraggio passabanda dal segnale non filtrato, cioè dal segnale a banda “intera”.

TABELLA**PER FILTRI DEL SECONDO ORDINE PASSABASSO**

(E, FACENDO ATTENZIONE AL FATTORE DI CONVERSIONE, ANCHE PASSAALTO)

BUTTERWORTH		BESSEL		CHEBICHEV CON PICCO DI RISONANZA DI 0,5 dB		CHEBICHEV CON PICCO DI RISONANZA DI 2 dB	
Fattore di conversione e f_c	Smorzamento ζ	Fattore di conversione f_c	Smorzamento ζ	Fattore di conversione f_c	Smorzamento ζ	Fattore di conversione f_c	Smorzamento ζ
1	0,707	1,274	0,866	1,231	0,579	0.907	0,433

Se il filtro è passabasso, il fattore di conversione è definito come:

$$f_c = \frac{\omega_0}{\omega_i} \rightarrow \omega_0 = \omega_i \cdot f_c$$

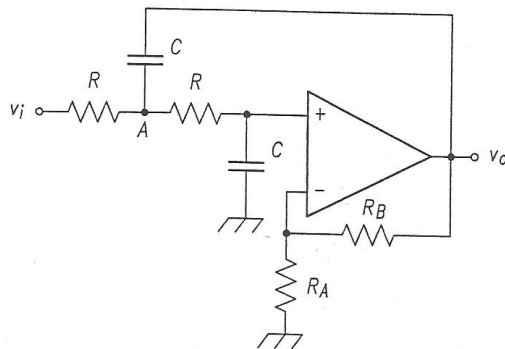
Se il filtro è passaALTO, la tabella è ugualmente valida, però si deve tener conto che, in tal caso, il fattore di conversione mantiene lo stesso valore, ma è definito in maniera reciproca e quindi va usato in maniera diversa. Il fattore è definito per il passaALTO, come:

$$f_c = \frac{\omega_i}{\omega_0} \rightarrow \omega_0 = \frac{\omega_i}{f_c}$$

Per esempio quando, nota la ω_i , dobbiamo ricavare la ω_0 , allora:

- ⤴ se il filtro è passabasso dobbiamo moltiplicare ω_i per il fattore f_c di conversione
- ⤴ se il filtro è passaALTO dobbiamo dividere ω_i per il fattore f_c di conversione.

**PROGETTO DI UN FILTRO ATTIVO PASSABASSO⁹
DEL SECONDO ORDINE
DELLA TOPOLOGIA DI SALLEN-KEY O VCVS
VERSIONE SEMPLIFICATA A COMPONENTI UGUALI)**



1. Si individua nella **tabella** il valore del fattore di conversione

$$f_c = \text{fattore di conversione} = \frac{\omega_0}{\omega_t}$$

$$f_c = \text{fattore di conversione} = \frac{\text{pulsazione naturale}}{\text{pulsazione di taglio}}$$

**2. Si fissano
arbitrariamente**

- ⤴ il valore di **C** (per es: **C = 470 pF**) per il calcolo delle **resistenze R**
- ⤴ il valore di **R_A** (per esempio **R_A=27KΩ oppure 47KΩ**) per il calcolo di **R_A** e di **R_B**.

3. Si ricava il valore delle resistenze R

dalla relazione: $\omega_0 = \frac{1}{R \cdot C} \Rightarrow R = \frac{1}{\omega_0 \cdot C}$

⁹ Se il filtro richiesto è passaALTO, lo schema circuitale è lo stesso della figura, con le posizione delle R e delle C scambiate (a eccezione di R_A ed R_B) e con il fattore di conversione reciproco:

$$f_c = \text{fattore di conversione} = \frac{\omega_t}{\omega_0}$$

$$f_c = \text{fattore di conversione} = \frac{\text{pulsazione di taglio}}{\text{pulsazione naturale}}$$

4. In base ai valori di smorzamento ζ forniti dalla tabella (in funzione della forma della risposta impulsiva – Butterworth, Chebichev o BESSEL- richiesta o desiderata) **SI RICA VA**

L'AMPLIFICAZIONE A_0 dalla relazione: $A_0 = 3 - 2\zeta$

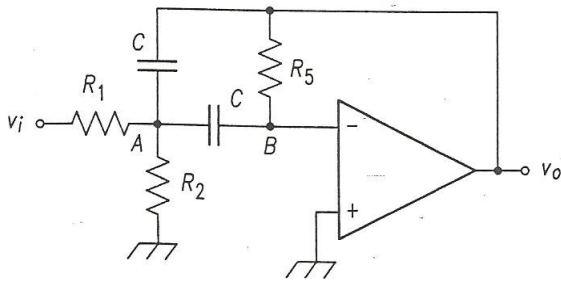
4. **Si determinano i valori R_A ed R_B delle resistenze di reazione negativa** dell'amplificatore non invertente del filtro, mediante l'espressione dell'amplificazione:

$$A_0 = 1 + \frac{R_B}{R_A}$$

5. Se l'**amplificazione** in banda passante che **desideriamo** è **diversa** dalla A_0 determinata a punto 4, allora **si aggiunge in cascata uno stadio** amplificatore con amplificazione:

$$A^* = \frac{A}{A_0}$$

**PROGETTO DI UN FILTRO ATTIVO
PASSABANDA A BANDA STRETTA, INVERTENTE
DEL SECONDO ORDINE
DELLA TOPOLOGIA A REAZIONE NEGATIVA MULTIPLA
(VERSIONE SEMPLIFICATA A CAPACITA' UGUALI)**



1. Si verifica la realizzabilità del filtro secondo la topologia a reazione multipla, appurando che l'amplificazione A_0 e la selettività Q assegnate¹⁰ soddisfino le relazioni:

$$1 < Q < 15 \quad Q^2 \geq \frac{|A_0|^2}{2}$$

2. Si fissa arbitrariamente il valore di C (per es: $C=10\text{nF}$)
3. Si ricava il valore della resistenza R_5 dalla quale dipende la larghezza di banda del filtro:

$$R_5 = \frac{1}{\pi \cdot C \cdot B}$$

4. Si ricava il valore della resistenza R_1 dalla quale dipende l'amplificazione in centro-banda A_0 :

$$A_0 = -\frac{R_5}{2 \cdot R_1} \Rightarrow R_1 = \frac{R_5}{2 \cdot A_0}$$

¹⁰ $A_0 = -\frac{R_5}{2 \cdot R_1} \quad Q = \frac{f_0}{B}$

5. **Si ricava il valore della resistenza R_2** dalla quale dipende la frequenza centrale f_o :

$$R_2 = \frac{R_1}{4\pi^2 \cdot f_o^2 \cdot C^2 \cdot R_1 \cdot R_5 - 1}$$

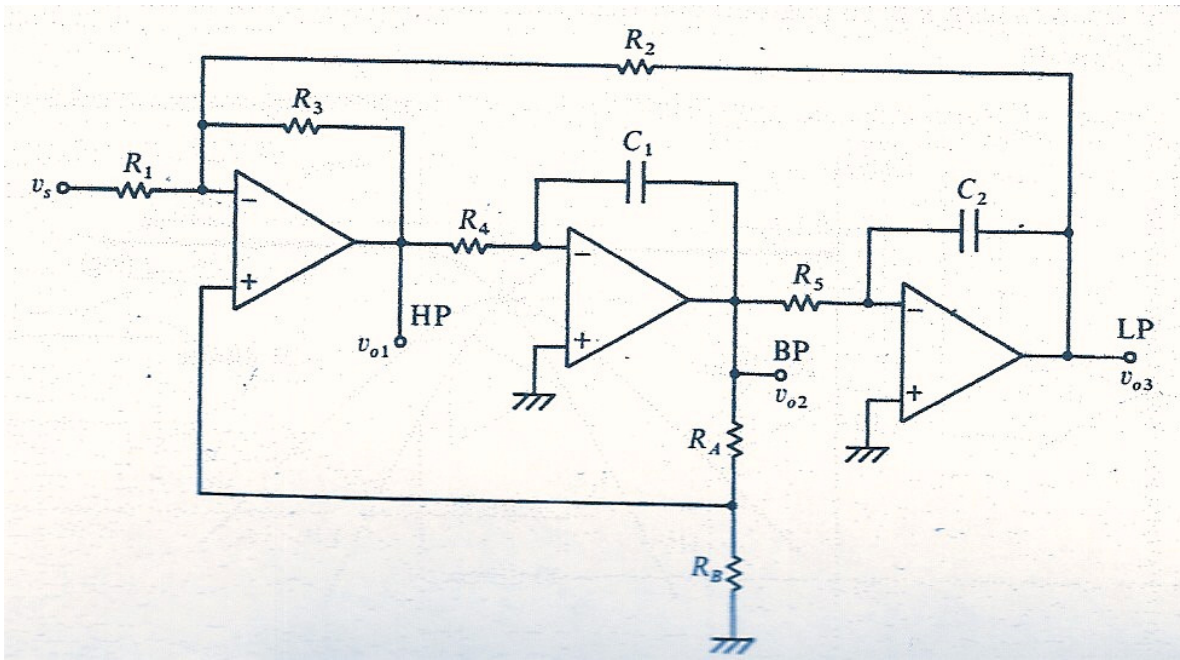
6. Si ricavano i valori delle frequenze di taglio f_{INF} ed f_{SUP} :

$$f_{t_{INF}} = f_o - \frac{B}{2} \quad f_{t_{SUP}} = f_o + \frac{B}{2}$$

PROGETTO DI UN FILTRO ATTIVO

della topologia UNIVERSALE

- A VARIABILI DI STATO
(VERSIONE SEMPLIFICATA A COMPONENTI UGUALI)



Se $R_1 = R_2 = R_3 = R_0$ e $C_1 = C_2 = C$ e inoltre $R_4 = R_5 = R$, si ha un filtro a guadagno unitario

Per la **progettazione** dei filtri di questa topologia ci servono **due tabelle**:

- ▲ la **tabella di pag. 13** (**Tabella per filtri del secondo ordine passabasso.....**), relativa ai filtri del secondo ordine, tabella che abbiamo già utilizzato per il progetto dei filtri con topologia di Sallen-Key (VCVS) e con topologia A REAZIONE MULTIPLA; questa, tabella ci fornisce, una volta scelta la forma della risposta (Butterworth, Chebichev, Bessel), i valori del coefficiente di smorzamento e del fattore di conversione f_c
- ▲ una nuova tabella, ("**Tabella dei parametri del filtro universale in funzione dei componenti del circuito**", che riportiamo nella pagina seguente), che ci **fornisce le espressioni dei parametri A_0 , ω_0 , ζ** (che è lo smorzamento, detto anche ξ), Q (che è la **SELETTIVITA'**, in funzione dei componenti R , C , R_A , R_B e che quindi **ci permette di dimensionare i componenti R , C , R_A , R_B** suddetti.

TABELLA DEI PARAMETRI DEL FILTRO UNIVERSALE
(NELLA VERSIONE SEMPLIFICATA A COMPONENTI UGUALI¹¹⁾)
IN FUNZIONE DEI COMPONENTI DEL CIRCUITO

USCITA del filtro universale	amplificazione in banda passante A_0	pulsazione naturale¹² o pulsazione del polo ω_0	smorzamento ζ	selettività $Q = 1/2\zeta$
passaALTO	-1	$\frac{1}{R \cdot C}$	$\frac{3}{2} \cdot \frac{R_B}{R_A + R_B}$	$\frac{R_A + R_B}{3 \cdot R_B}$
passaBANDA	$\frac{R_A + R_B}{3 \cdot R_B}$			
PassaBASSO	-1			
		<i>uguale per tutti</i>	<i>uguale per tutti</i>	<i>uguale per tutti</i>

11 **$R_1 = R_2 = R_3 = R_0$**
 $R_4 = R_5 = R$
 $C_1 = C_2 = C$

12 Detta anche ω_n

PASSI DEL PROGETTO DEL FILTRO UNIVERSALE

1. In base alla forma di risposta effettiva richiesta (Butterworth, Chebichev, Bessel), **si ricavano dalla prima tabella** (TABELLA PER FILTRI DEL SECONDO ORDINE PASSABASSO....) i valori del coefficiente di smorzamento e del fattore di conversione f_c
2. Dall'espressione del fattore f_c di conversione, si calcola il valore della pulsazione naturale A_0, ω_0, ζ
3. Noti i valori di A_0 (che può essere diversa da -1 solo per il filtro passabanda), di ω_0 e di ζ , **si entra nella seconda tabella** (TABELLA DEI PARAMETRI DEL FILTRO UNIVERSALE) dalla quale si possono ricavare i valori dei componenti R, C, R_A, R_B .

APPROCCIO AL PROGETTO DI UN FILTRO ATTIVO DI ORDINE SUPERIORE AL SECONDO

Un filtro di ordine superiore al secondo può essere realizzato come **cascata di filtri del secondo ordine** (incluso un *filtro del primo ordine* se N è *dispari*).

Possiamo scegliere, **per i diversi stadi del secondo ordine**, la **stessa topologia** (Sallen-key o VCVS, reazione negativa multipla, filtro universale a variabili di stato) e lo **stesso tipo di forma della risposta in frequenza effettiva** (Butterworth, Chebichev, Bessel).

Se però, desiderando per il filtro complessivo una certa forma di risposta effettiva (per es: Butterworth), progettiamo i **singoli stadi uguali** tra loro, indipendentemente uno dall'altro, senza specifici accorgimenti, **la forma risultante della risposta effettiva del filtro complessivo potrebbe non avere più la forma prescelta (per es: Butterworth)** e la **frequenza di taglio potrebbe non essere più quella del singolo stadio**.

Per il mantenimento della forma prescelta bisogna usare i valori di fattore di smorzamento e di fattore di conversione indicati nella specifica tabella riportata di seguito, e non in base alla tabella di pag. 13.

TABELLA PER FILTRI DI ORDINE SUPERIORE AL SECONDO

Ordine n.	Stadio	Chebyshev							
		Butterworth		Bessel		(R = 0,5 dB)		(R = 2,0 dB)	
						f_c	ξ	f_c	ξ
2	1	1	0,707	1,274	0,866	1,231	0,579	0,907	0,433
3	1	1	-	1,325	-	0,626	-	0,369	-
	2	1	0,500	1,445	0,724	1,069	0,293	0,941	0,196
4	1	1	0,924	1,432	0,958	0,597	0,709	0,471	0,538
	2	1	0,383	1,606	0,621	1,031	0,170	0,964	0,109
5	1	1	-	1,505	-	0,362	-	0,218	-
	2	1	0,809	1,559	0,888	0,690	0,424	0,627	0,282
	3	1	0,309	1,758	0,546	1,018	0,110	0,976	0,069
6	1	1	0,965	1,606	0,980	0,396	0,731	0,316	0,554
	2	1	0,707	1,692	0,818	0,768	0,276	0,730	0,176
	3	1	0,259	1,908	0,489	1,012	0,077	0,983	0,048
7	1	1	-	1,687	-	0,256	-	0,155	-
	2	1	0,901	1,719	0,340	0,504	0,458	0,461	0,304
	3	1	0,623	1,825	0,756	0,823	0,154	0,797	0,122
	4	1	0,223	2,053	0,444	1,008	0,059	0,987	0,035
8	1	1	0,980	1,781	0,988	0,297	0,740	0,238	0,561
	2	1	0,832	1,835	0,894	0,599	0,310	0,572	0,197
	3	1	0,556	1,956	0,703	0,861	0,144	0,842	0,090
	4	1	0,195	2,132	0,408	1,006	0,043	0,090	0,027

STRUTTURA DELLA TABELLA

Nella tabella **ogni riga** è relativa a un **valore dell'ordine N del filtro** e ci indica il **numero identificativo del singolo stadio**¹³, da cui discende il **numero degli stadi** necessari alla realizzazione; per ogni stadio vengono forniti il valore del fattore di conversione f_c e del fattore di smorzamento ξ (altrove chiamato ζ).

Ogni **singolo stadio** è del **secondo ordine**, a meno che, nella riga, manchi l'indicazione del valore del fattore di smorzamento ξ nel qual caso lo stadio è del primo ordine (per i filtri del primo ordine, infatti, f_c è definito, ma non è definito ξ)

Osserviamo esplicitamente che

- ♣ un filtro di ordine superiore con **ordine N=PARI** sarà formato **solo** da **stadi del secondo ordine**;
 (per esempio un filtro del sesto ordine viene realizzato con tre filtri del secondo ordine:
 $6 \text{ (ordine totale)} = 2 \text{ (ordine 1° stadio)} + 2 \text{ (ordine 2° stadio)} + 2 \text{ (ordine 3° stadio)}$)
- ♣ un filtro di ordine superiore con ordine **N=DISPARI** sarà formato da **UNO stadio del PRIMO ORDINE** e da **un certo numero di stadi del secondo ordine**;
 (per esempio un filtro del 5° ordine viene realizzato con un filtro del primo ordine e due filtri del secondo ordine:
 $5 \text{ (ordine totale)} = 1 \text{ (ordine 1° stadio)} + 2 \text{ (ordine 2° stadio)} + 2 \text{ (ordine 3° stadio)}$)

PROGETTO DEL FILTRO DI ORDINE SUPERIORE AL SECONDO

In base all'ordine N e alla forma della risposta effettiva che ci vengono richiesti (o che riteniamo opportuni), individuiamo:

- ♣ la **riga** della tabella **PER FILTRI DI ORDINE SUPERIORE AL SECONDO** che ci **fornisce i valori del fattore di conversione e del fattore di smorzamento**
- ♣ la **colonna** che fa riferimento alla **forma della risposta effettiva** (Butterworth, Chebichev, Bessel).

L'intersezione fra la riga e la colonna selezionate ci fornisce, **per ciascuno stadio** del filtro, **i valori del fattore di conversione f_c e del coefficiente di smorzamento ξ** (altrove chiamato ζ).

Riguardo alla progettazione dei singoli stadi della **cascata** costituente il filtro “complessivo” (della topologia richiesta o desiderata), essi vengono progettati in base alle procedure di progetto descritte in precedenza ([pagg. 14, 16, 18](#)) e in base alla tabella dei filtri di ordine superiore al secondo riportata nella pagina precedente (e non in base alla tabella ([di pag. 13](#))) che è relativa a filtri “MONOSTADIO” del SECONDO ordine di SALLEN-KEY o VCVS.

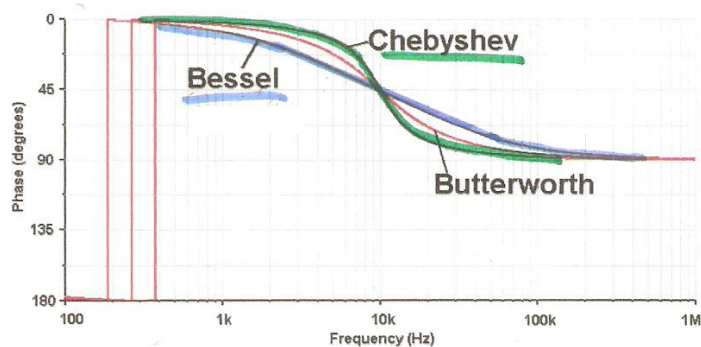
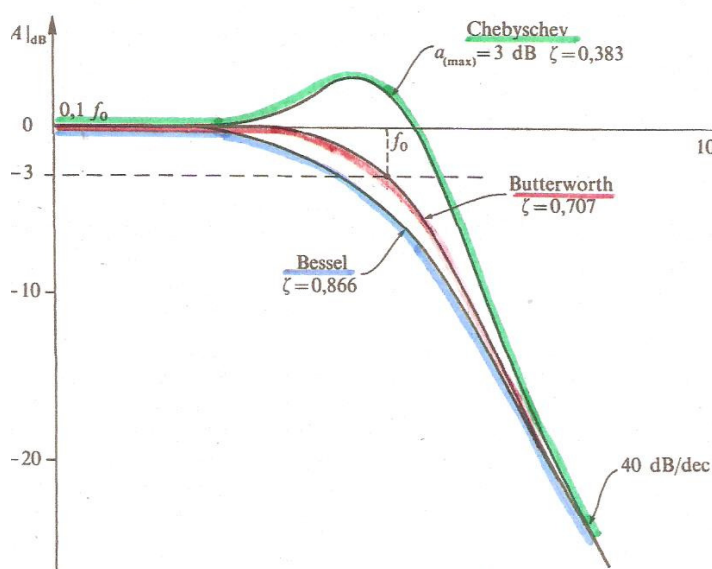
¹³ Nel caso di filtro di ordine N=2 (realizzabile con un unico stadio di ordine 2), il numero identificativo dell'unico stadio è “1”

Nel caso di filtro ordine N=4 (realizzabile con due stadi di ordine 2) i numeri identificativi dei due stadi sono: “1 2”

Nel caso di filtro ordine N=7 (realizzabile con uno stadio di ordine 1 e tre stadi di ordine 2) i numeri identificativi dei quattro stadi sono: “1 2 3 4”

APPENDICE 1

FILTRI: APPROSSIMAZIONI DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA EFFETTIVA

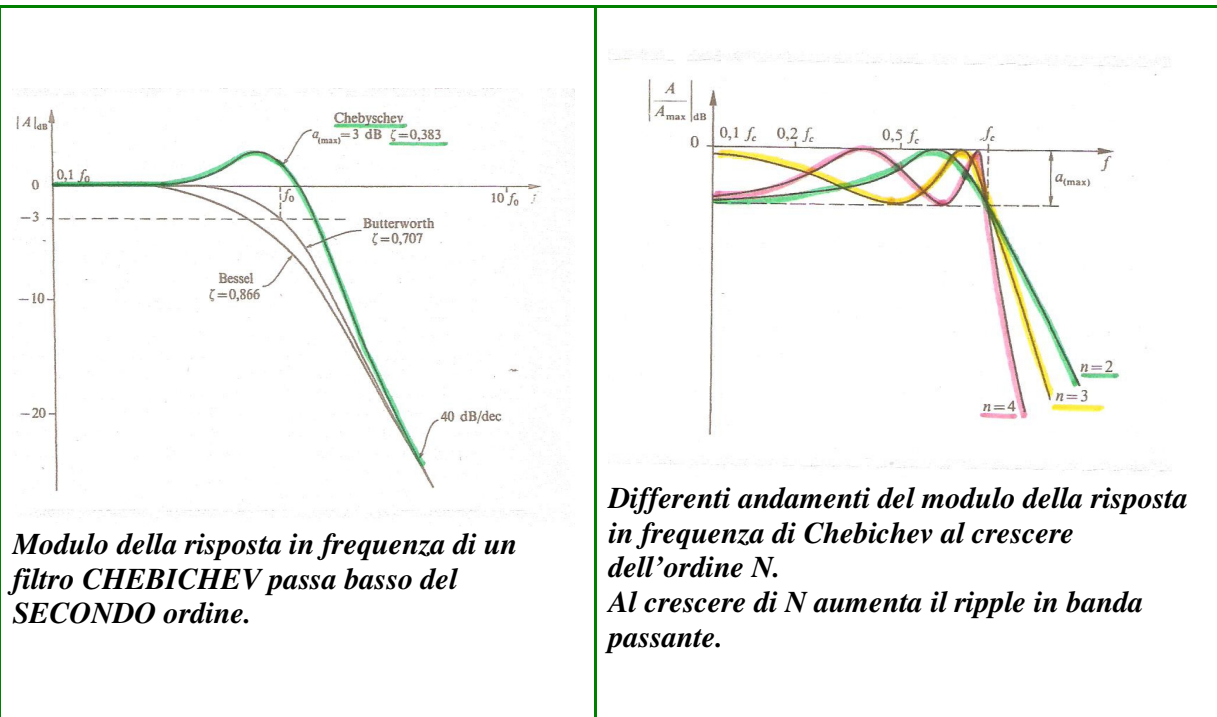


In alto: MODULO della risposta in frequenza di filtri passaBASSO del SECONDO ordine con forme di tipo CHEBICHEV, BUTTERWORTH, BESSEL.

In basso: FASE della risposta in frequenza di filtri passaBASSO del SECONDO ordine con forme di tipo CHEBICHEV, BUTTERWORTH, BESSEL.

APPROSSIMAZIONE DI TIPO CHEBICHEV DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA

E' utilizzata nelle telecomunicazioni, quando è necessaria una forte separazione fra banda passante e banda oscura (e quindi una forte pendenza di taglio, ossia un elevato roll-off), sacrificando la massima piatezza e la costanza nel ritardo temporale.



PREGI

Forte separazione fra banda passante e banda oscura

CARATTERISTICHE

6. **Smorzamento** $\zeta < 0,707$ (poli complessi coniugati con fase $\varphi > 45^\circ$)
7. **Eventuale picco** nel modulo della **risposta in frequenza** (se $\zeta < 0,5$)
8. **Sovraelongazione** e **oscillazioni**¹⁴ nella **risposta al gradino** [che rendono questo filtro non ottimale nel trattamento dei segnali a onda rettangolare]

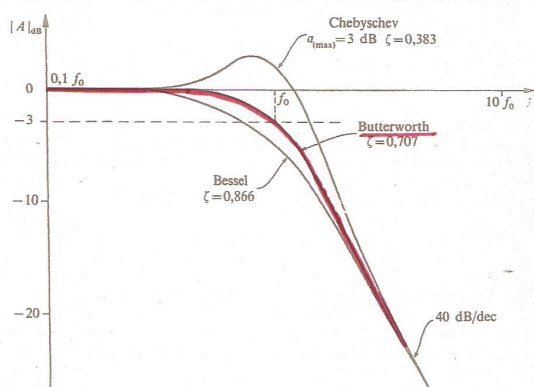
¹⁴ Questo filtro è caratterizzato, rispetto a quelli che vedremo in seguito, da un valore più basso di smorzamento, il che comporta appunto che le oscillazioni della risposta al gradino sono meno smorzate, ossia più accentuate

INCONVENIENTI

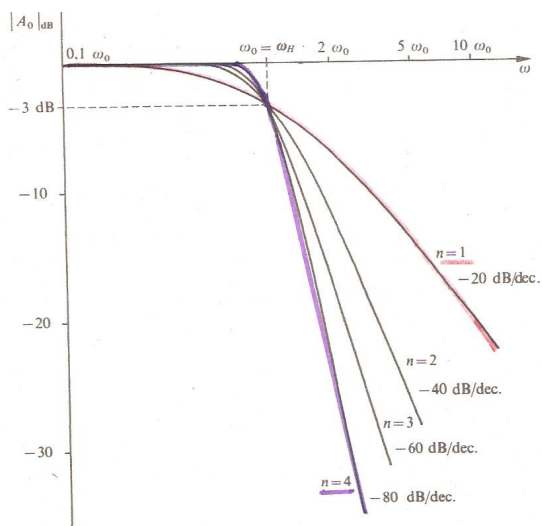
- ✦ Eventuale distorsione, per effetto dell'**eventuale picco** presente nel **modulo** della risposta in frequenza
- ✦ Comportamento non ottimale nel trattamento dei segnali a onda rettangolare, a causa della presenza di **sovraelongazione** e **oscillazioni** nella risposta al gradino

APPROSSIMAZIONE DI TIPO **BUTTERWORTH** (DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA)

E' **la più utilizzata** nei filtri attivi, sia **in generale**, sia nel settore dell'**alta fedeltà audio**, settore nel quale è necessario che il filtro **amplifichi** nella **stessa misura** tutte le **componenti di segnale (a diversa frequenza)** presenti nella banda passante.



Modulo della risposta in frequenza di un filtro BUTTERWORTH passa basso del SECONDO ordine.



*Differenti andamenti del modulo della risposta in frequenza di BUTTERWORTH al crescere dell'ordine N.
Al crescere di N aumenta la zona piatta in banda passante.*

PREGI

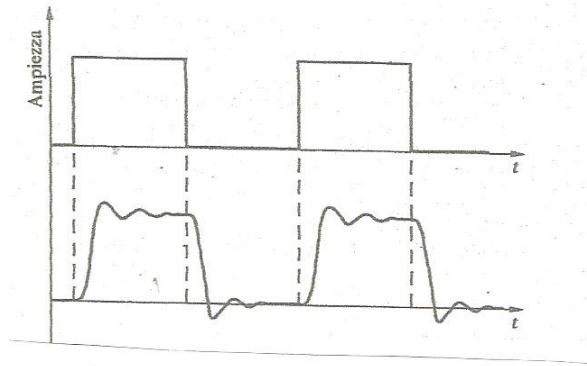
Bassa distorsione, grazie alla **massima piattezza**, in banda passante, del **modulo della risposta** in frequenza.

CARATTERISTICHE

- ⌘ **Smorzamento $\zeta = 0.707$** (poli complessi coniugati con fase $\varphi = 45^\circ$)
- ⌘ **Assenza** di sovraelongazione e oscillazioni nella risposta al gradino
- ⌘ **Transizione morbida** fra banda passante e banda oscura (o banda attenuata)

INCONVENIENTI

- ⤴ **Distorsione di fase**, che però è **rilevata dall'orecchio umano** in **misura molto minore** della distorsione di ampiezza (e quindi non rappresenta un inconveniente sostanziale nella realizzazione di filtri audio).



Risposta al gradino del filtro di Butterworth

La forma rettangolare è sostanzialmente conservata, grazie alla piatezza in banda passante del modulo della risposta del filtro, il che rende possibile l'utilizzazione in campo audio.

Si notano però gli effetti distorsivi dovuti ai differenti ritardi temporali delle componenti a frequenza diversa (l'onda rettangolare ha un contenuto armonico ricchissimo), fenomeno dovuto alla non linearità della fase della risposta in frequenza del filtro.

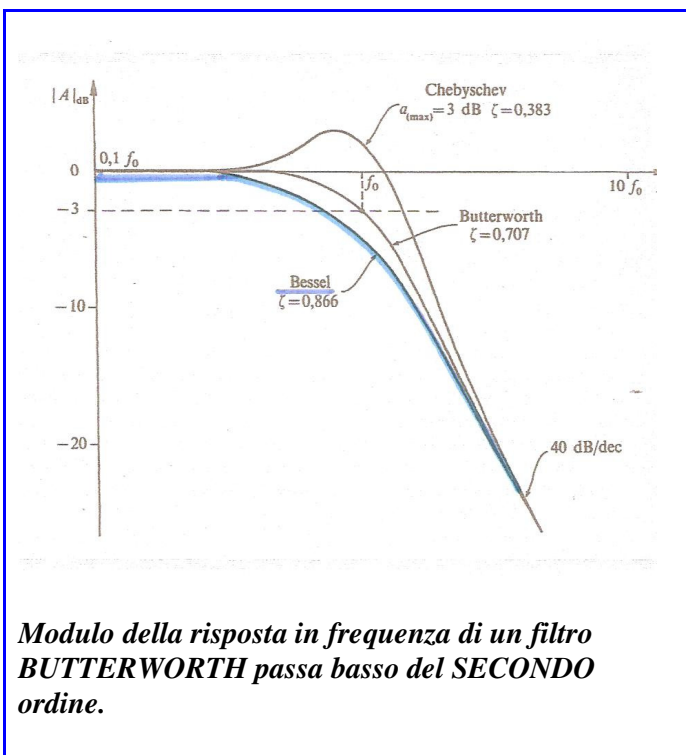
Gli effetti della distorsione di fase sono però, come già accennato, molto meno rilevanti, in campo musicale, degli effetti della distorsione di ampiezza.

APPROSSIMAZIONE DI TIPO BESSEL, o THOMPSON, (DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA)

E' utilizzata, oltre che nel campo audio, nel settore delle telecomunicazioni, quando sono presenti molti filtri in cascata e i ritardi temporali introdotti sono notevoli.

Il filtro di Bessel, avendo risposta in fase massimamente lineare, e quindi tempi di ritardo costanti, non accentua la diversità fra i tempi di ritardo delle diverse componenti di segnale.

E' inoltre utilizzata nel **filtraggio dei segnali ad onda quadra**, in risposta ai quali non genera oscillazioni (la risposta al gradino, infatti, non presenta né sovraelongazione né oscillazioni)



PREGI

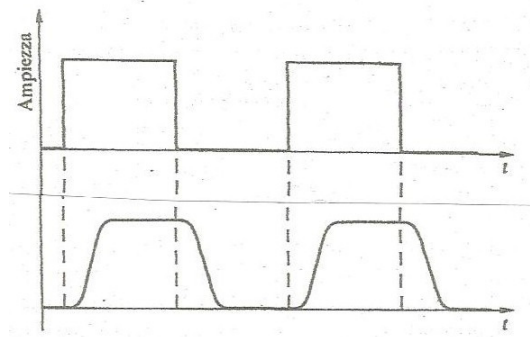
Tempi di ritardo costanti grazie alla linearità della risposta in fase, linearità che è la massima ottenibile.

CARATTERISTICHE

- ⤴ Smorzamento $\zeta = 0,866$ (poli complessi coniugati con fase $\varphi = 30^\circ$)
- ⤴ Nessun picco nel modulo della **risposta in frequenza**
- ⤴ Assenza (come in Butterworth) di **sovraelongazione** e **oscillazioni** nella **risposta al gradino**

INCONVENIENTI

- ⤴ Discriminazione **poco netta** fra banda passante e banda oscura.



Risposta al gradino del filtro di Bessel

La conservazione “sostanziale della forma rettangolare nella risposta al gradino è garantita dalla piattezza del modulo della risposta, che caratterizza (sia pure in una banda minore) anche il filtro di Bessel, oltre che quello di Butterworth.

La forma d'onda rettangolare (caratterizzata da un contenuto armonico ricchissimo) è conservata anche nel dettaglio, perché i ritardi temporali delle componenti armoniche a frequenza diversa sono tutti uguali, grazie alla linearità della fase della risposta in frequenza del filtro di Bessel. Gli effetti della distorsione di fase sono però, come già accennato, molto meno rilevanti, in campo musicale, degli effetti della distorsione di ampiezza.

CONSIDERAZIONI

Sono adatti all'**uso musicale** i filtri che hanno **il modulo della risposta in frequenza piatto in un intervallo della banda passante esteso quanto più possibile**, in modo che il segnale di uscita abbia sostanzialmente la stessa forma di quello di ingresso (risultando dato dal prodotto del segnale di ingresso per una costante). Questa caratteristica è posseduta dal filtro di Butterworth e, in misura minore, dal filtro di Bessel (I filtri di Chebichev presentano invece un picco -almeno- in banda passante).

I filtri **adatti al campo musicale** sono quindi **Butterworth** e **Bessel**.

Quest'ultimo presenta un intervallo di piattezza (del modulo della risposta) minore, però ha il pregio di una notevole linearità della fase della risposta in frequenza.

Benché le distorsioni di fase siano, in campo audio, molto meno importanti di quelle, di ampiezza, la linearità nella fase della risposta comporta ritardi temporali costanti per le componenti di segnale a frequenza diversa, il che risulta molto utile nel trattamento di segnali con un amplissimo contenuto armonico, come l'onda rettangolare, in quanto consente di conservarne la forma anche nel dettaglio.

Uil filtro di Bessel è quindi particolarmente adatto ai segnali di ingresso di forma rettangolare.

Non sono invece particolarmente adatti alle applicazioni audio i filtri di Chebichev perché il modulo della loro risposta in frequenza non è piatto, ma presenta un picco in banda passante (se di ordine 2) o addirittura un'ondulazione (se di ordine superiore a 2), il che comporta che il segnale di uscita non conserva la forma di quello di ingresso.

I filtri di Chebichev inoltre presentano un picco e delle ondulazioni nella risposta **temporale** al gradino, per cui risultano poco adatti al trattamento di segnali a onda rettangolare. Questi filtri sono utilizzati nelle applicazioni delle telecomunicazioni nelle quali è richiesta una forte separazione fra banda passante e banda oscura.

APPENDICE 2

**FILTRI ATTIVI:
POLI E ZERI
FUNZIONI DI TRASFERIMENTO IN “s”
PARAMETRI**

INDIVIDUAZIONE DEI POLI E DEGLI ZERI DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO IN “s” DI UN FILTRO A PARTIRE DAI SUOI COEFFICIENTI DI SMORZAMENTO ζ E PULSAZIONE NATURALE ω_0

Se si conoscono solo i parametri di un filtro del 2° ordine e si vuole conoscere il valore dei poli (che sono complessi coniugati), ci si può servire delle relazioni:

$$\omega_0 = \omega_n = \text{modulo del polo} = \text{pulsazione naturale del filtro}$$

Fase del polo in funzione dello smorzamento ζ

$$\zeta = -\cos(\text{fase del polo}) \leftrightarrow \zeta = -\cos(\vartheta)$$

$$\zeta = -\frac{\text{Re}(polo)}{\omega_0}$$

da cui:

Parte reale del polo

in funzione dello smorzamento ζ e della pulsazione naturale ω_0

$$\text{Re}(polo) = -\zeta \cdot \omega_0$$

E inoltre:

$$[\text{Re}(polo)]^2 + [\text{Im}(polo)]^2 = \omega_0^2$$

da cui:

Parte immaginaria del polo

in funzione dello smorzamento ζ e della pulsazione naturale ω_0

$$\text{Im}(polo) = \sqrt{\omega_0^2 - [\text{Re}(polo)]^2}$$

NOTA

In certi casi, e in particolare per il filtro passaBANDA, al posto dello smorzamento ζ , conosciamo la selettività $Q = 1/(2\zeta)$ e invece che di pulsazione naturale (ω_0 detta anche ω_n) si parla di **frequenza centrale f_0** .

In questa situazione, ci si può facilmente ricondurre al caso precedentemente esposto avendo presente che:

$$Q = -\frac{1}{2\zeta} \rightarrow \zeta = -\frac{1}{2Q}$$

e che si può scrivere:

$$\omega_0 = \omega_n = 2\pi \cdot f_0$$

ESEMPIO

Dato un filtro con:

♣ smorzamento $\zeta = 0,05$

♣ pulsazione naturale $\omega_0 = 6280 \text{ rad/s}$

si ha:

$$\text{MODULO del polo} = \omega_0 = \omega_n = 6280 \text{ [rad / s]}$$

$$\text{Re}(\text{polo}) = -\zeta \cdot \omega_0 = 0,05 \cdot 6280 = -314 \text{ [rad / s]}$$

e inoltre:

$$\text{Im}(\text{polo}) = \sqrt{\omega_0^2 - [\text{Re}(\text{polo})]^2} = \sqrt{6280^2 - [314]^2}$$

$$\text{Im}(\text{polo}) = 6272,14 \text{ [rad / s]}$$

INDIVIDUAZIONE DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO IN “s” DI UN FILTRO A PARTIRE DAI SUOI COEFFICIENTI DI SMORZAMENTO ζ E PULSAZIONE NATURALE ω_0

Se si conoscono i coefficienti (smorzamento ζ e pulsazione naturale ω_0) di un filtro attivo del secondo ordine e se ne vuole scrivere la funzione di trasferimento in s, bisogna ricordare che **le f. di t. di tutti i filtri del secondo ordine sono caratterizzate tutte da una coppia di poli complessi coniugati** e che, perciò il loro **denominatore** è sempre il cosiddetto **termine trinomio**, cioè il polinomio in s di secondo grado:

$$s^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega_0) \cdot s + \omega_0^2$$

nel quale compaiono proprio lo smorzamento ζ e la pulsazione naturale ω_0

Inoltre, sempre riguardo ai filtri del secondo ordine, bisogna ricordare che:

- c) il filtro **passaBASSO non** presenta zeri e che quindi il suo **numeratore** è una **costante**
- d) il filtro **passaALTO** è dotato di uno **zero doppio nell'origine** e che quindi il suo **numeratore** presenta il **fattore “s²”**, moltiplicato per una costante
- e) il filtro **passaBANDA** è dotato di uno **zero semplice nell'origine** e che quindi il suo **numeratore** presenta il **fattore “s”**, moltiplicato per una costante
- f) il filtro **ELIMINABANDA** è dotato di una **coppia di zeri puramente immaginari** e che quindi il suo **numeratore** presenta il **fattore “s²+ ω_0^2 ”**, moltiplicato per una costante

In altri termini, se si conoscono i coefficienti (smorzamento ζ e pulsazione naturale ω_0) di un filtro attivo del secondo ordine, e se ne vuole scrivere la funzione di trasferimento in s, bisogna tener presente la TABELLA DELLE FUNZIONI DI TRASFERIMENTO DEI FILTRI, che riportiamo qui di seguito:

TABELLA DELLE FUNZIONI DI TRASFERIMENTO DEI FILTRI

Ordine n	Tipo	Funzione di trasferimento $A(s)$
1	Passa-basso	$\frac{A_0}{\frac{s}{\omega_0} + 1} = \frac{A_0 \omega_0}{s + \omega_0}$
	Passa-alto	$\frac{A_0 \frac{s}{\omega_0}}{\frac{s}{\omega_0} + 1} = \frac{A_0 s}{s + \omega_0}$
2	Passo-basso	$\frac{A_0}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + 1} = \frac{A_0 \omega_0^2}{s^2 + 2\zeta \omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{A_0 \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$
	Passa-alto	$\frac{A_0 \frac{s^2}{\omega_0^2}}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + 1} = \frac{A_0 s^2}{s^2 + 2\zeta \omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{A_0 s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$
	Passa-banda	$\frac{A_0 2\zeta \frac{s}{\omega_0}}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + 1} = \frac{A_0 2\zeta \omega_0 s}{s^2 + 2\zeta \omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{A_0 \frac{\omega_0}{Q} s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$
	Elimina-banda	$\frac{A_0 \left(\frac{s^2}{\omega_0^2} + 1 \right)}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + 1} = \frac{A_0 (s^2 + \omega_0^2)}{s^2 + 2\zeta \omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{A_0 (s^2 + \omega_0^2)}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$

Notiamo che, nella tabella, le f. di t. del secondo ordine, sono fornite in tre forme diverse, ma equivalenti:

- ▲ forma nella quale **compare lo smorzamento ζ** e nella quale, al denominatore, il termine trinomio ha il termine in s^2 diviso per ω_0^2
- ▲ forma nella quale **compare lo smorzamento ζ** e nella quale, al denominatore, il termine trinomio ha il **termine in s^2 “da solo”, cioè diviso per 1** (ed è questa la forma che noi useremo abitualmente)
- ▲ forma nella quale non compare lo smorzamento ζ , ma la **selettività $Q = 1/(2\zeta)$** e nella quale, al denominatore, il termine trinomio ha il termine in s^2 “da solo”, cioè diviso per 1 (ed è questa la forma che noi useremo abitualmente)

La 2 si ricava dalla 1 dividendo numeratore e denominatore della 1 per ω_0^2

La 3 si ricava dalla 2 sostituendo, nella 2, il coefficiente Q al posto di $1/(2\zeta)$, e quindi sostituendo $1/Q$ al posto di 2ζ ;

inoltre la 3 si può ricavare dalla 1 dividendo numeratore e denominatore della 1 per ω_0^2 e sostituendo, nella 2, il coefficiente Q al posto di $1/(2\zeta)$.

La tabella che in pratica useremo è la seguente:

AZIONE FILTRANTE DEL 2° ORDINE	FUNZIONE DI TRASFERIMENTO
passaBASSO	$A(s) = \frac{\omega_0^2 \cdot A_0}{s^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega_0) \cdot s + \omega_0^2}$
passaALTO	$A(s) = \frac{A_0 \cdot s^2}{s^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega_0) \cdot s + \omega_0^2}$
passaBANDA	$A(s) = \frac{(2 \cdot \zeta \cdot \omega_0) \cdot A_0 \cdot s}{s^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega_0) \cdot s + \omega_0^2}$
ELIMINAbanda	$A(s) = \frac{A_0 (s^2 + \omega_0^2)}{s^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega_0) \cdot s + \omega_0^2}$

ESERCIZIO

Scrivere l'espressione della funzione di trasferimento in s di un filtro del secondo ordine a reazione multipla caratterizzato dai parametri

$$\blacktriangle \quad f_0 = 1 \text{ KHz (frequenza centrale)}$$

$$\blacktriangle \quad B = 100 \text{ Hz (banda passante)}$$

$$\blacktriangle \quad A_0 = 10 \text{ (amplificazione in banda passante)}$$

SVOLGIMENTO

Dai dati assegnati possiamo ricavare:

$$Q = \frac{\text{frequenza centrale}}{\text{banda passante}} = \frac{f_0}{B}$$

$$Q = \frac{1000}{100} = 10$$

e quindi lo smorzamento ζ e la pulsazione naturale ω_0 (detta anche ω_n).

[Per il filtro passabanda la pulsazione naturale coincide con la pulsazione di centro banda].

Per lo smorzamento, da

$$Q = \frac{1}{2 \cdot \zeta}$$

si ha:

$$\zeta = \frac{1}{2 \cdot Q}$$

$$\zeta = \frac{1}{2 \cdot 10} = 0,05$$

Per la pulsazione naturale si ha:

$$\omega_0 = 2\pi \cdot f_0 = 6,28 \cdot 1000 = 6280 \text{ [rad / s]}$$

Sappiamo che la f. di t. di un filtro passabanda è dotata di:

- ⤴ una coppia di poli complessi coniugati (il che comporta la presenza del termine trinomio a denominatore)
- ⤴ uno zero semplice nell'origine (il che comporta che il numeratore contiene un fattore "s", moltiplicato per una costante)

e quindi si può scrivere come:

$$A(s) = \frac{(2 \cdot \zeta \cdot \omega_0) \cdot A_0 \cdot s}{s^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega_0) \cdot s + \omega_0^2}$$

$$A(s) = \frac{6280 \cdot s}{s^2 + 628 \cdot s + 39,44 \cdot 10^6}$$

$$A(s) = \frac{(2 \cdot 0,05 \cdot 6280) \cdot 10 \cdot s}{s^2 + (2 \cdot 0,05 \cdot 6280) \cdot s + 6280^2}$$

ESERCIZIO

Determinare l'espressione della funzione di trasferimento in s e il valore dei poli e degli zeri di un filtro passabasso con topologia Sallen-Key (o VCVS) e risposta di tipo Butterworth, caratterizzato da:

$A_0 = 1,59$ (amplificazione di centro banda)

$f_t = 10\text{KHz}$ (frequenza di taglio)

CONSIDERAZIONI E CALCOLI PRELIMINARI

Trattandosi di un **passaBASSO**, il filtro **non ha zeri**, ma soltanto (come tutti gli altri filtri del secondo ordine che conosciamo) una coppia di poli complessi coniugati, corrispondente alla presenza del termine trinomio al denominatore della f. di t. in “s”.

Inoltre, essendo un filtro di Butterworth:

è caratterizzato da $\zeta = 0,707$

ha fattore di conversione unitario: $f_c = 1$, per cui la pulsazione naturale ω_0 (detta anche ω_n) coincide con la pulsazione di taglio ω_t e vale:

$$\omega_0 = 62800 \text{ [rad / s]}$$

ESPRESSIONE DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Ricordando la tabella delle f. di t. in “s” dei filtri del secondo ordine, possiamo scrivere l'espressione generale della funzione di trasferimento:

$$A(s) = \frac{\omega_0^2 \cdot A_0}{s^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega_0) \cdot s + \omega_0^2}$$

Sostituendo in essa i parametri specifici del filtro in esame, otteniamo la f. di t. che ci serve:

$$A(s) = \frac{62800^2 \cdot 1,59}{s^2 + 2 \cdot 0,707 \cdot 62800 \cdot s + 62800^2}$$

$$A(s) = \frac{6271 \cdot 10^6}{s^2 + 88799,2 \cdot s + 3944 \cdot 10^6}$$

DETERMINAZIONE DEI POLI

$$\text{Modulo}(polo) = \omega_0 = \omega_n = 62800 \text{ [rad / s]}$$

Parte reale dei due poli complessi coniugati:

$$\text{Re}(p) = -0,707 \cdot 62800 = -44399,6$$

$$\text{Re}(p) \approx -44400 \text{ [rad / s]}$$

Parte immaginaria dei due poli complessi coniugati:

$$\text{Im}(polo) = \sqrt{\omega_0^2 - [\text{Re}(polo)]^2} = \sqrt{62800^2 - 44400^2}$$

$$\text{Im}(P) \approx 44413 \text{ [rad / s]}$$

ESERCIZIO

Data la funzione di trasferimento:

$$A(s) = \frac{49926}{s^2 + 44400 \cdot s + 985,96 \cdot 10^6}$$

determinare il valore dei poli.

PRIMO MODO

L'equazione assegnata, ha un denominatore di 2° grado con discriminante negativo

$$\Delta = 44400^2 - 4 \cdot 1 \cdot 985,96 \cdot 10^6 \approx -1971$$

e numeratore costante. Quindi presenta una coppia di poli complessi coniugati e nessuno zero. E' quindi la f. di t. di un sistema del secondo ordine di tipo passabasso. Perciò possiamo determinare i poli partendo dal confronto di questa equazione con quella “generale” del filtro passabasso del secondo ordine:

$$A(s) = \frac{\omega_0^2 \cdot A_0}{s^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega_0) \cdot s + \omega_0^2}$$

Dal confronto ricaviamo il coefficiente di smorzamento e la pulsazione naturale. Da questi ultimi parametri possiamo determinare i poli.

Diamo inizio al confronto dei termini noti dei denominatori per determinare i parametri:

$$\omega_0^2 = 985,96 \cdot 10^6$$

$$\omega_0 = \sqrt{985,96 \cdot 10^6} = 31400 \quad = \text{Modulo}(\text{polo}) \quad [\text{rad} / \text{s}]$$

Confrontiamo ora i coefficienti di s

$$2 \cdot \zeta \cdot \omega_0 = 44400$$

$$2 \cdot \zeta \cdot 31400 = 44400$$

$$\zeta = \frac{44400}{2 \cdot 31400} = 0,707$$

Possiamo ora calcolare i poli:

$$\text{Re}(polo) = -\zeta \cdot \omega_0$$

$$\text{Re}(p) = -0,707 \cdot 31400 \approx -22200 \quad [\text{rad} / \text{s}]$$

$$\text{Im}(polo) = \sqrt{\omega_0^2 - [\text{Re}(polo)]^2} = \sqrt{31400^2 - 22200^2}$$

$$\text{Im}(polo) = 22206 \quad [\text{rad} / \text{s}][\text{rad} / \text{s}]$$

SECONDO MODO

Notiamo prima di tutto che i poli sono complessi coniugati perché il discriminante dell'equazione che si ottiene uguagliando a zero il denominatore, è negativo, infatti:

uguagliamo a zero il denominatore, cioè il termine trinomio: si ottiene un'equazione di secondo grado del tipo:

$$s^2 + k \cdot s + h = 0$$

(con coefficiente unitario di s^2)

Sappiamo che il coefficiente di “s” di una equazione di questo tipo rappresenta la somma cambiata di segno, delle radici dell'equazione, somma che, nel caso di radici complesse coniugate, rappresenta il doppio della parte reale del polo.

Abbiamo quindi:

$$\text{coefficiente di } s = -2 \cdot \text{Re}(\text{polo})$$

$$\text{Re}(\text{polo}) = -\frac{\text{coefficiente di } s}{2}$$

$$\text{Re}(\text{polo}) = -\frac{44400}{2} = -22200 \quad [\text{rad} / \text{s}]$$

Sappiamo poi che il termine noto è il prodotto delle radici, prodotto che, nel caso di radici complesse coniugate, coincide con il quadrato del polo.

Abbiamo quindi:

$$[\text{Modulo}(\text{polo})]^2 = 985,86 \cdot 10^6$$

$$\text{Modulo}(\text{polo}) = \sqrt{985,96 \cdot 10^6} = 31400 \quad [\text{rad} / \text{s}]$$

Riguardo alla parte immaginaria del polo si ha:

$$\text{Im}(\text{polo}) = \sqrt{\omega_0^2 - \text{Re}(\text{polo})^2} = \sqrt{31400^2 - 22200^2}$$

$$\text{Im}(\text{polo}) = 22206 \quad [\text{rad} / \text{s}] [\text{rad} / \text{s}]$$

Immagini non autoprodotte:

Cortesia Petrini e Calderini Edagricole

Bibliografia e sitografia:

Si veda il volume cartaceo