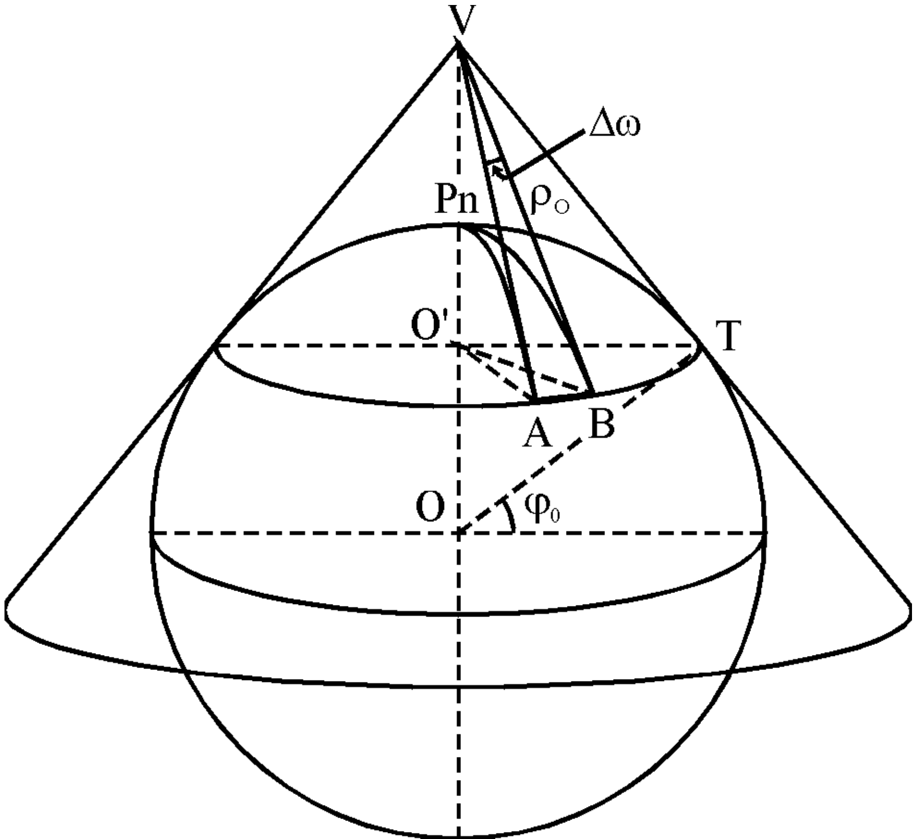
La rappresentazione cartografica

Proiezione conica diretta tangente

La carta conica diretta tangente è ottenuta, così come quella cilindrica, proiettando i punti della sfera rappresentativa terrestre, dal suo centro, su un cono circolare retto tangente lungo un parallelo di latitudine Il cono ha, di conseguenza, semiapertura uguale alla latitudine del parallelo di tangenza.



La rappresentazione cartografica

- Il polo viene proiettato nel vertice *V* del cono;
- I paralleli sono rappresentati da circonferenze concentriche aventi come centro comune il detto vertice;
- I meridiani sono ottenuti intersecando il loro piano con la superficie conica e sono rappresentati da semirette convergenti nel vertice *V* ugualmente distanziate tra loro;
- Il parallelo di latitudine φ_0 è l'unico che viene rappresentato in vera grandezza in quanto comune sia alla sfera sia al cono;
- Su di esso, pertanto, il modulo di riduzione lineare è 1 e per tale motivo è detto *parallelo standard* (o *isomecoica*).

La rappresentazione cartografica

- Sulla superficie conica il detto parallelo è rappresentato da una circonferenza avente come raggio:

$$\rho_0 = VT = OT \cdot \cot\varphi_0 = r \cdot \cot\varphi_0$$

- avendo posto il raggio *OT* della sfera rappresentativa unitario;
- Di conseguenza mentre sulla sfera l'arco di parallelo *AB* è uguale al simile arco di equatore per il coseno della latitudine, sulla carta lo stesso arco è uguale al raggio per l'angolo compreso tra le rappresentazioni dei due meridiani si ha pertanto:

$$\Delta\lambda \cos\varphi_0 = \rho_0 \Delta\omega$$

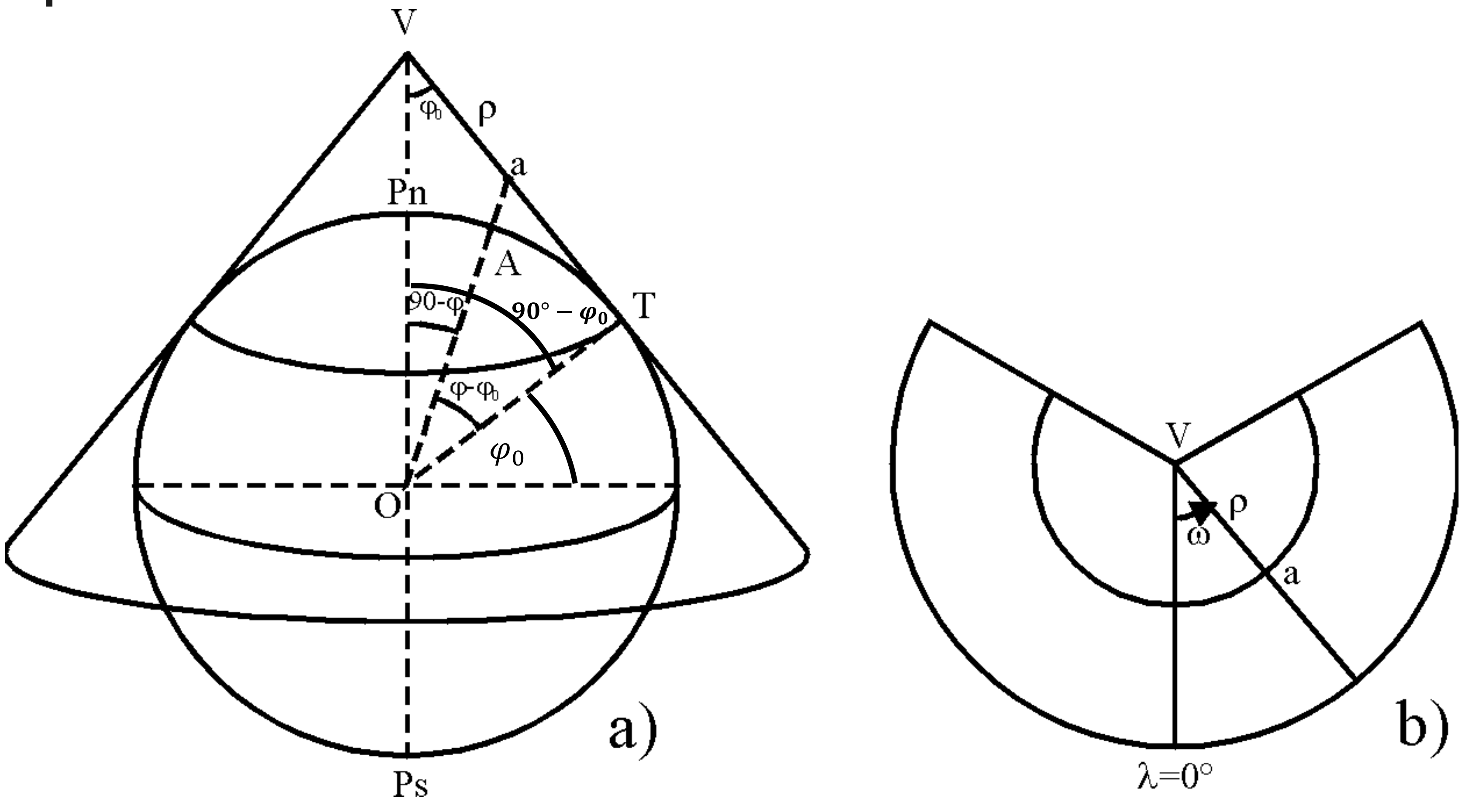
La rappresentazione cartografica

- da cui, sostituendo a ρ_0 il suo valore, si ottiene:

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta\lambda} = k = \operatorname{sen}\varphi_0$$

- dove *k*, sempre minore di uno, definita *costante di convergenza*, esprime il rapporto tra gli angoli che i meridiani formano sulla carta e i corrispondenti angoli della sfera.
- Consideriamo ora un generico punto *A* proiettato sul cono in *a* a una distanza ρ dal vertice del cono *V*.

La rappresentazione cartografica



La rappresentazione cartografica

- Tale distanza si ottiene applicando al triangolo *aOV* il teorema dei seni:

$$\frac{aV}{\cos\varphi} = \frac{aO}{\operatorname{sen}\varphi_0}$$

- e poi ricavando aO dal triangolo rettangolo aOT, ottenendo:

$$aO = \frac{OT}{\cos(\varphi - \varphi_0)} = \frac{r}{\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

La rappresentazione cartografica

- Pertanto si ha:

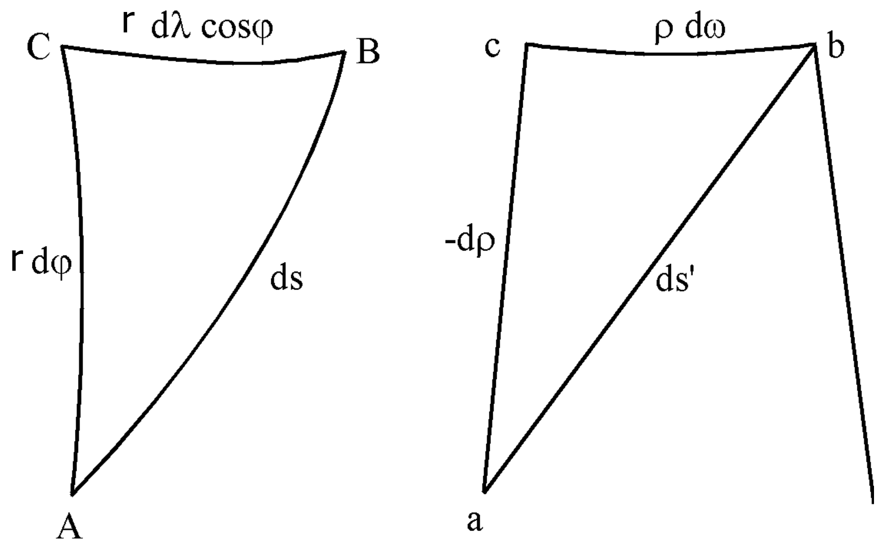
$$\rho = \frac{r\cos\varphi}{k\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

- Tagliando il cono lungo una generatrice si ottiene un settore circolare;
- il punto a viene riferito a un sistema di coordinate polari definito dal vertice V e dalla semiretta che rappresenta il meridiano di Greenwich.
- Le coordinate di a sono quindi l'anomalia ω e il raggio vettore ρ avendo considerato il raggio r della sfera rappresentativa.

$$\omega = k\lambda \qquad \rho = \frac{r\cos\varphi}{k\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

La rappresentazione cartografica

- La carta non è isogona;
- infatti, considerati ancora i triangoli infinitesimi sulla sfera e sulla carta (*ABC* e *abc*), si ricavano i moduli di riduzione lineare n_p e n_m;



La rappresentazione cartografica

- Il modulo di riduzione lineare lungo il parallelo è uguale a:

$$n_p = \frac{bc}{BC} = \frac{\rho d\omega}{r d\lambda \cos\varphi} = \frac{k\rho}{r\cos\varphi} = \sec(\varphi - \varphi_0)$$

- Il modulo di riduzione lineare lungo il meridiano è uguale a:

$$n_m = \frac{ac}{AC} = \frac{-d\rho}{r d\varphi} = \sec^2(\varphi - \varphi_0)$$

La rappresentazione cartografica

- Il segno meno assegnato al valore di *ac* si spiega in quanto procedendo da *a* verso *b* il raggio diminuisce.
- La precedente relazione viene ottenuta nel modo che segue:

$$ac = -d\rho = \rho - \rho' = \frac{r}{k} \cdot \left[\frac{\cos\varphi}{\cos(\varphi - \varphi_0)} - \frac{\cos\varphi'}{\cos(\varphi' - \varphi_0)} \right]$$

- che si approssima a:

$$ac = \frac{r}{k} \cdot \frac{\cos\varphi \cdot \cos(\varphi' - \varphi_0) - \cos\varphi' \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)}{[\cos(\varphi - \varphi_0)]^2}$$

- Il numeratore diventa uguale a $k \cdot d\varphi$ se si tiene conto che:

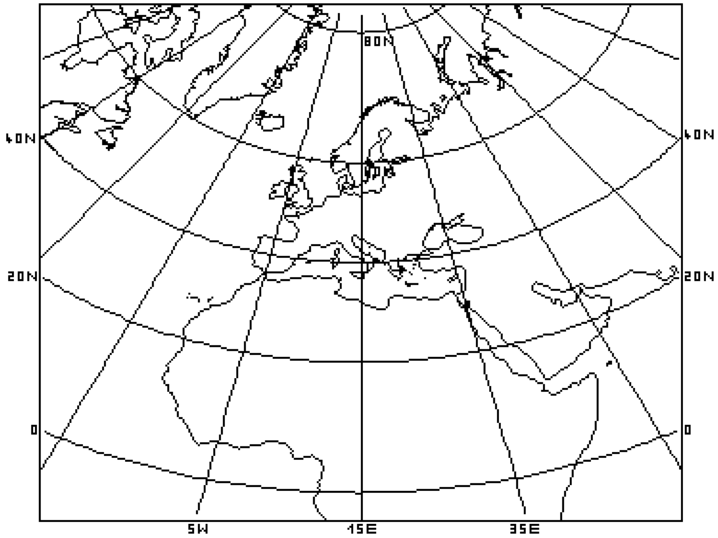
$$\cos\varphi' = \cos(\varphi + d\varphi) \cong \cos\varphi - d\varphi \operatorname{sen}\varphi \quad \text{in quanto} \quad \cos d\varphi \cong 1,\ \operatorname{sen} d\varphi \cong d\varphi$$

La rappresentazione cartografica

- e analogamente:

$$\cos(\varphi' - \varphi_0) = \cos[(\varphi - \varphi_0) + d\varphi] \cong \cos(\varphi - \varphi_0) - d\varphi\,\mathrm{sen}(\varphi - \varphi_0)$$

- Essendo $n_p \neq n_m$, la carta non è isogona.



Esempio di carta conica diretta tangente

La rappresentazione cartografica

Carta di Lambert

- La carta conica diretta tangente non può essere usata in navigazione in quanto non è isogona;
- tuttavia con un artificio, simile a quello usato da Mercatore per la carta cilindrica, è possibile conferirle la proprietà dell'isogonismo.
- Il merito è dovuto a Lambert che per primo illustrò la carta nella sua opera *Beiträge* nel 1772 assieme ad altre proiezioni quali la Mercatore trasversa.
- Le relazioni di corrispondenza della carta di Lambert si possono ricavare considerando i triangoli infinitesimi precedenti;
- affinché la carta sia isogona è necessario che i triangoli ABC e abc siano simili e cioè che venga soddisfatta la proporzione:

La rappresentazione cartografica

$$-\frac{d\rho}{r d\varphi} = \frac{\rho d\omega}{r d\varphi} = \frac{ds'}{ds} = n$$

- Lasciando immutato, così come per la carta di Mercatore, il modo con cui vengono rappresentati i meridiani, resta ancora valida la relazione:

$$d\omega = k\, d\, \lambda$$

- e, pertanto, il secondo termine della proporzione diventa:

$$n_p = \frac{k\rho}{r \cos\varphi}$$

La rappresentazione cartografica

- Affinché la carta sia isogona è necessario che e, di conseguenza, anche il primo termine deve essere uguale a:

$$n_m = -\frac{d\rho}{r d\varphi} = \frac{k\rho}{r\cos\varphi}$$

- che può essere posto sotto la forma:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -k\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

- da cui si ricava con un procedimento di integrazione

$$\log\rho = k\log\tan\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right) + \text{cost}$$

La rappresentazione cartografica

- dove *cost* è una costante.
- Se nella relazione ora ricavata si pone $\varphi = 0°$, si ottiene:

$$\log \rho_e = \text{cost}$$

- essendo il raggio dell'equatore sulla carta. Sottraendo membro a membro le due ultime relazioni, si ha:

$$\log \rho - \log \rho_e = \log \frac{\rho}{\rho_e} = \log \left[\tan\left(45° - \frac{\varphi}{2} \right) \right]^k$$

- e passando dai logaritmi ai numeri, si ha:

$$\rho = \rho_e \left[\tan\left(45° - \frac{\varphi}{2} \right) \right]^k$$

La rappresentazione cartografica

- Pertanto, le relazioni di corrispondenza della carta di Lambert sono:

$$\begin{cases} \omega = k\lambda \\ \rho = \rho_e \left[\tan\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)\right]^k \end{cases}$$

- mentre il modulo di riduzione lineare è dato da:

$$n = k\rho_e \frac{\left[\tan\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)\right]^k}{r \cos\varphi}$$

La rappresentazione cartografica

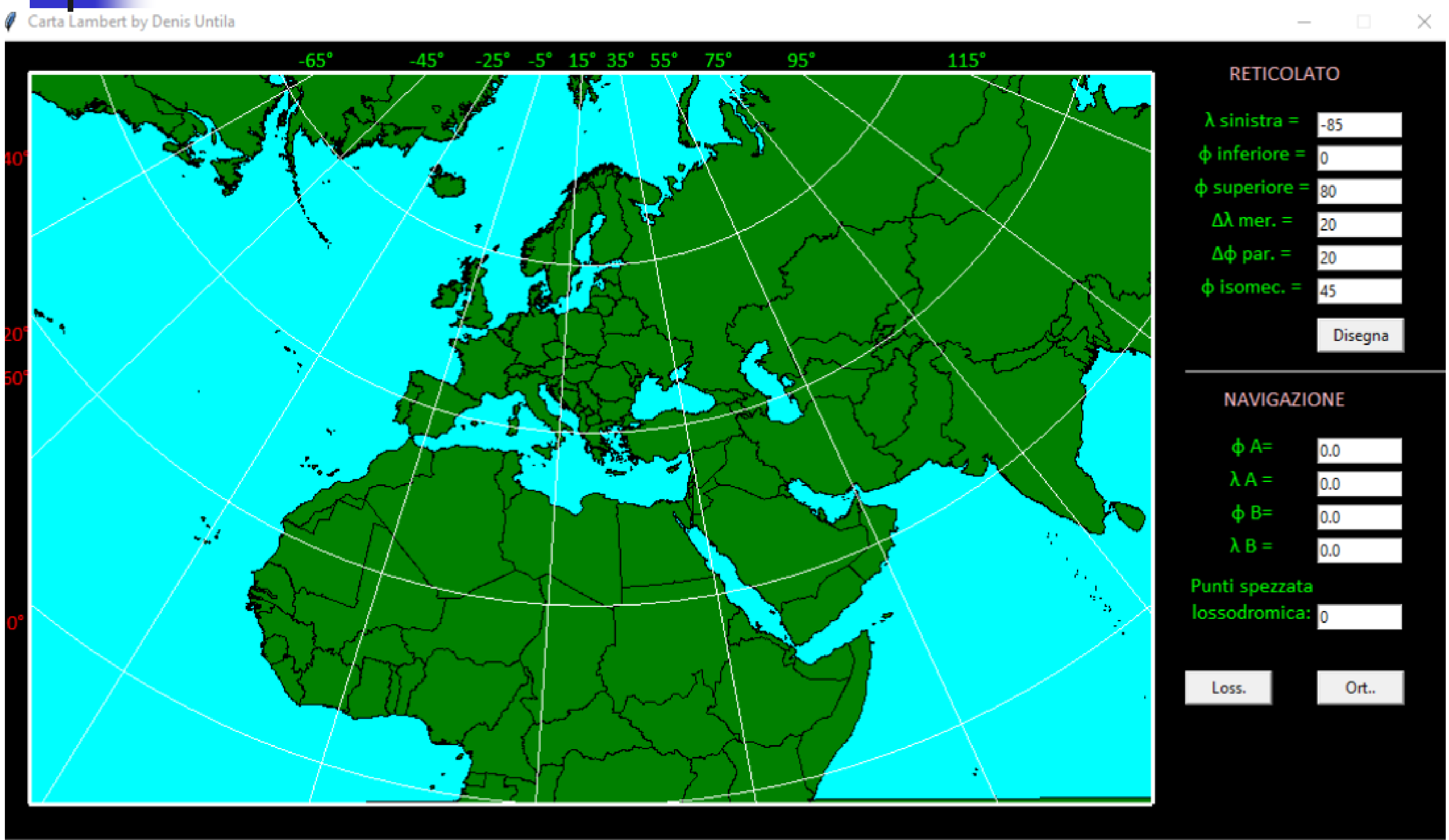
- Il raggio dell'equatore ρ_e si può ricavare da tale espressione ricordando che il modulo *n* diventa uguale a 1 lungo il parallelo di tangenza φ_0;
- si ha, infatti:

$$1 = k\rho_e \frac{\left[\tan\left(45° - \frac{\varphi_0}{2}\right)\right]^k}{r\cos\varphi_0}$$

- da cui:

$$\rho_e = \frac{r\cos\varphi_0}{k\left[\tan\left(45° - \frac{\varphi_0}{2}\right)\right]^k}$$

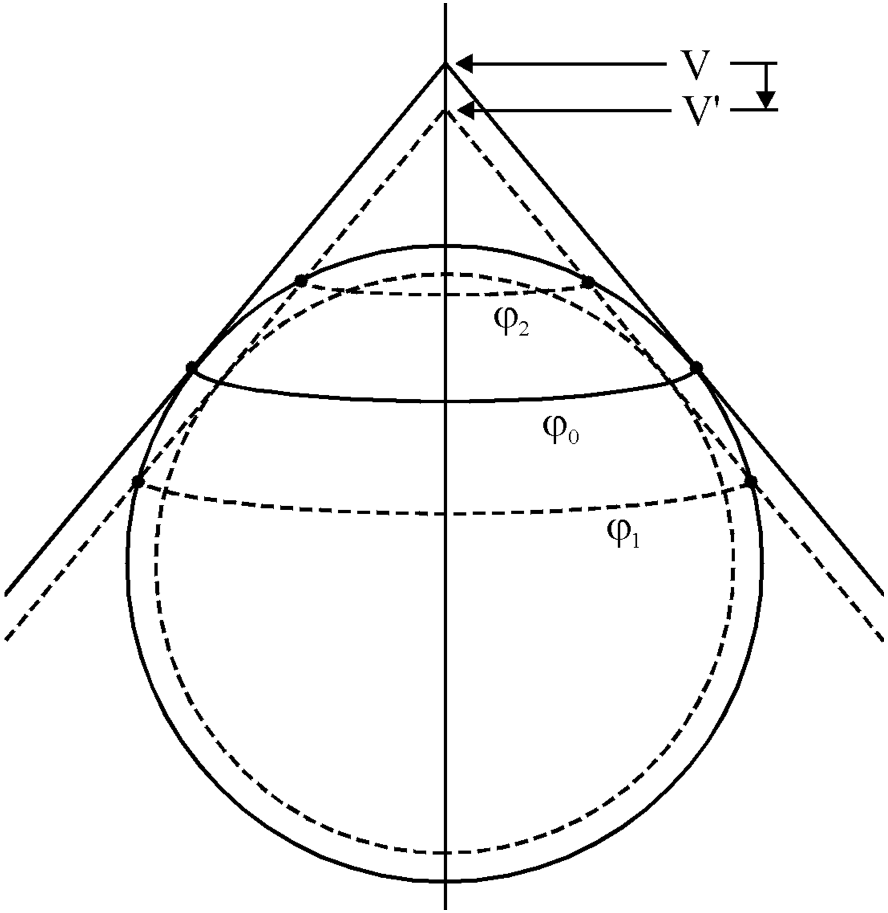
La rappresentazione cartografica



La rappresentazione cartografica

- Per migliorare la corrispondenza tra la superficie della sfera rappresentativa terrestre e il cono è sufficiente considerare il cono non più tangente ma secante lungo due *paralleli standard* (o *isomecoiche*).
- Il cono secante di vertice V' deriva dal cono tangente di vertice V traslato verso il basso di una distanza VV'.
- I due coni, avendo la stessa apertura, hanno uguale costante di convergenza k e, di conseguenza, i meridiani sono rappresentati nello stesso modo della carta conica tangente.

La rappresentazione cartografica



La rappresentazione cartografica

- Sui due paralleli standard, di latitudine φ_1 e φ_2, il modulo *n* è uguale a 1 in quanto i paralleli sono comuni alla sfera e al cono;
- tra i due paralleli standard il modulo è minore di 1 mentre al di là degli stessi il modulo è maggiore di 1.
- Con un’opportuna scelta di si può ottenere una distribuzione più uniforme delle deformazioni lineari.
- L’uso di un cono secante equivale a considerare una sfera rappresentativa di raggio r’<r tangente al nuovo cono o anche a moltiplicare il modulo di riduzione lineare per una costante n_0=r’/r scelta in modo che *n* risulti unitario lungo i due paralleli standard.
- Le relazioni di corrispondenza della carta conica secante si possono scrivere prendendo come riferimento le relazioni viste per la carta tangente;

La rappresentazione cartografica

- la prima resta immutata in quanto sia il cono tangente sia il cono secante hanno la stessa semiapertura, la seconda deve essere moltiplicata per $n_0=r'/r$.
- Si ha, pertanto:

$$\omega = k\lambda$$

$$\rho = n_0 \rho_e \left[\tan\left(45° - \frac{\varphi}{2} \right) \right]^k = \rho'_e \left[\tan\left(45° - \frac{\varphi}{2} \right) \right]^k$$

- dove il prodotto $n_0 \rho_e$, indicato con ρ'_e , rappresenta il nuovo raggio equatoriale sulla carta;
- la costante di convergenza *k*, in prima approssimazione (per modeste differenze di latitudine tra i due paralleli standard) è uguale a:

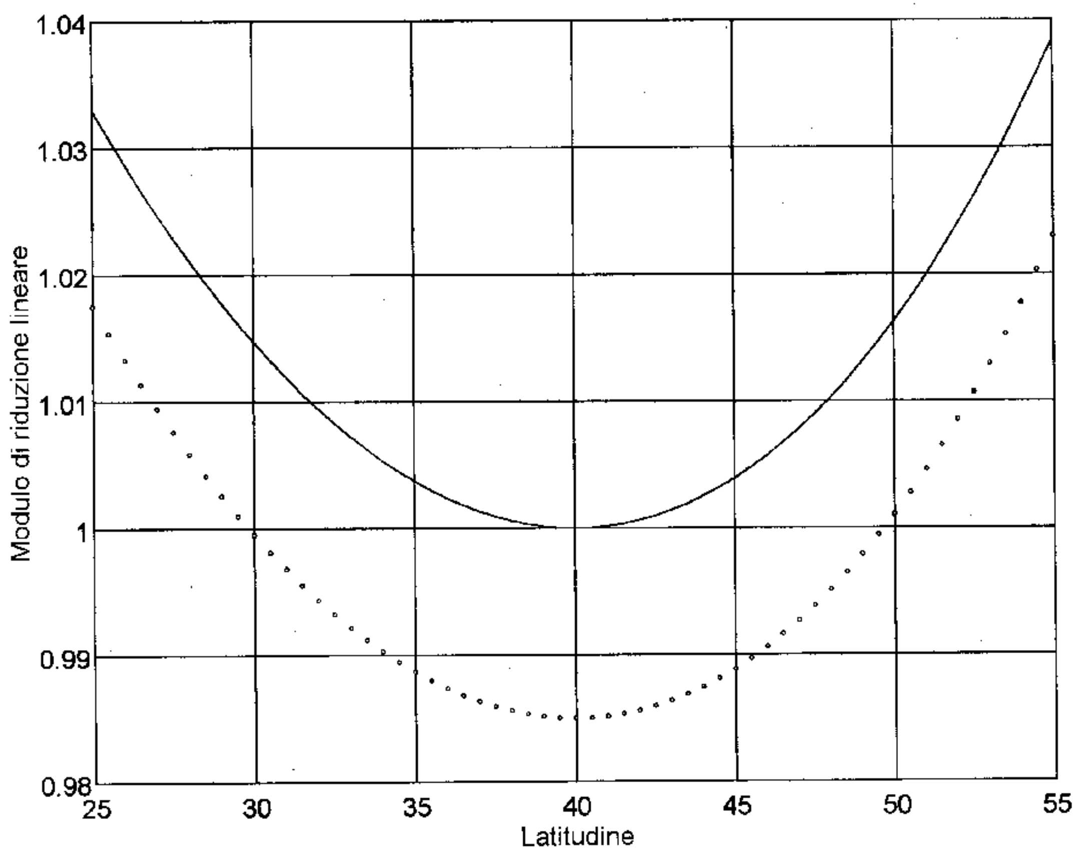
La rappresentazione cartografica

$$k = \operatorname{sen}\varphi_0 \qquad \text{con} \qquad \varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

- Il modulo di riduzione lineare diventa:

$$n = k\rho'_e \frac{\left[\tan\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)\right]^k}{r\cos\varphi}$$

La rappresentazione cartografica



Modulo di riduzione lineare per carta di Lambert tangente (curva intera) e per carta di Lambert secante (curva tratteggiata)

La rappresentazione cartografica

- Il nuovo raggio equatoriale ρ'_e può essere ricavato dalla precedente relazione osservando che *n* è uguale a 1 lungo i due paralleli standard;
- si ha:

$$\rho'_e = \frac{r\cos\varphi_1}{k\left[\tan\left(45° - \frac{\varphi_1}{2}\right)\right]^k} = \frac{r\cos\varphi_2}{k\left[\tan\left(45° - \frac{\varphi_2}{2}\right)\right]^k}$$

- In definitiva, mentre i meridiani sono rappresentati in modo analogo a quanto già visto per la carta conica tangente, i paralleli sono archi di circonferenza il cui raggio è diminuito del rapporto $n_0=r'/r$.
- Tale valore può essere ricavato effettuando il rapporto tra ρ'_e e ρ_e.