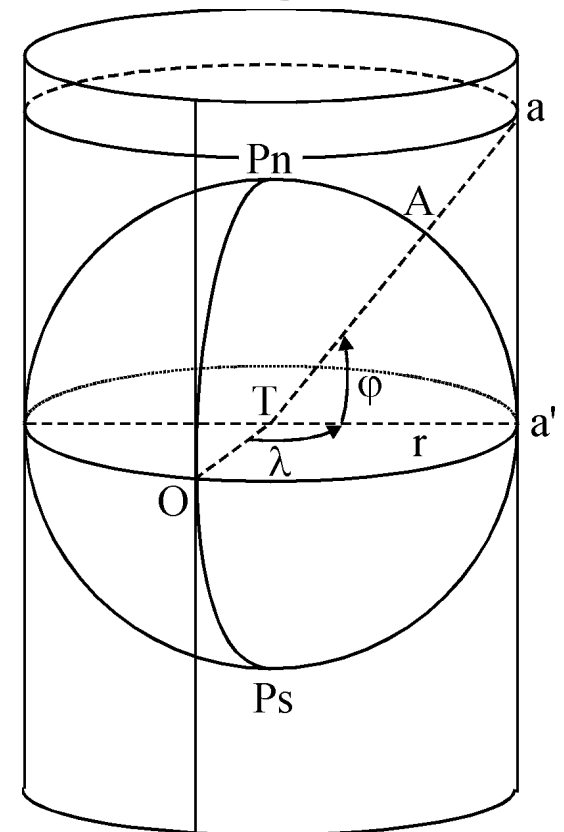


La rappresentazione cartografica

Proiezione cilindrica diretta tangente

La proiezione cilindrica diretta tangente è ottenuta proiettando i punti della sfera rappresentativa terrestre, da un punto di vista posto al centro di essa, su un cilindro circolare retto tangente lungo l'equatore.



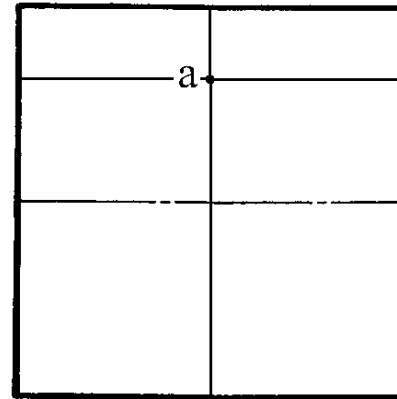
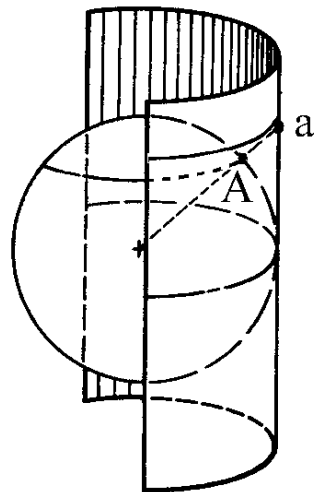
La rappresentazione cartografica



- L'equatore viene rappresentato senza alcuna deformazione in quanto è comune sia alla sfera sia al cilindro;
- I paralleli sono rappresentati da circonferenze aventi la stessa lunghezza dell'equatore e di conseguenza subiscono deformazioni tanto maggiori quanto più elevata è la latitudine;
- I meridiani sono ottenuti intersecando il loro piano con la superficie del cilindro e sono tutti ugualmente distanziati tra loro.
- I poli geografici non possono essere rappresentati.

La rappresentazione cartografica

- Tagliando il cilindro lungo una generatrice, per esempio quella che rappresenta l'antimeridiano di Greenwich, si ottiene una superficie piana di forma rettangolare sulla quale l'equatore e i paralleli sono rappresentati da rette tra loro parallele, e i meridiani da altrettante rette parallele perpendicolari all'equatore.



La rappresentazione cartografica

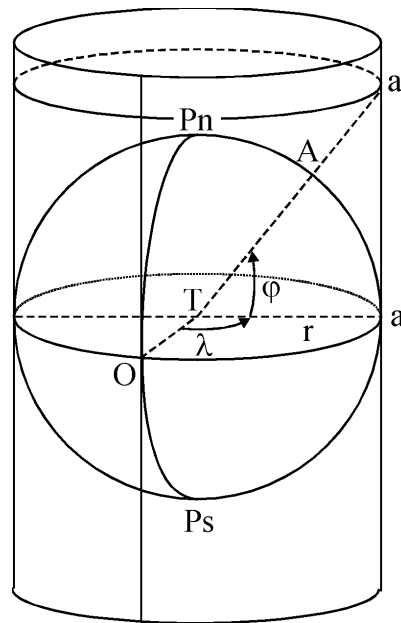
- Se ci si riferisce a un sistema di coordinate cartesiane ortogonali di cui l'asse delle ascisse è fatto coincidere con l'equatore e l'asse delle ordinate con la rappresentazione del meridiano di Greenwich, le relazioni che legano le coordinate cartesiane con quelle geografiche (*relazioni di corrispondenza*) sono:

$$x = r \lambda$$

$$y = r \tan \varphi$$

La rappresentazione cartografica

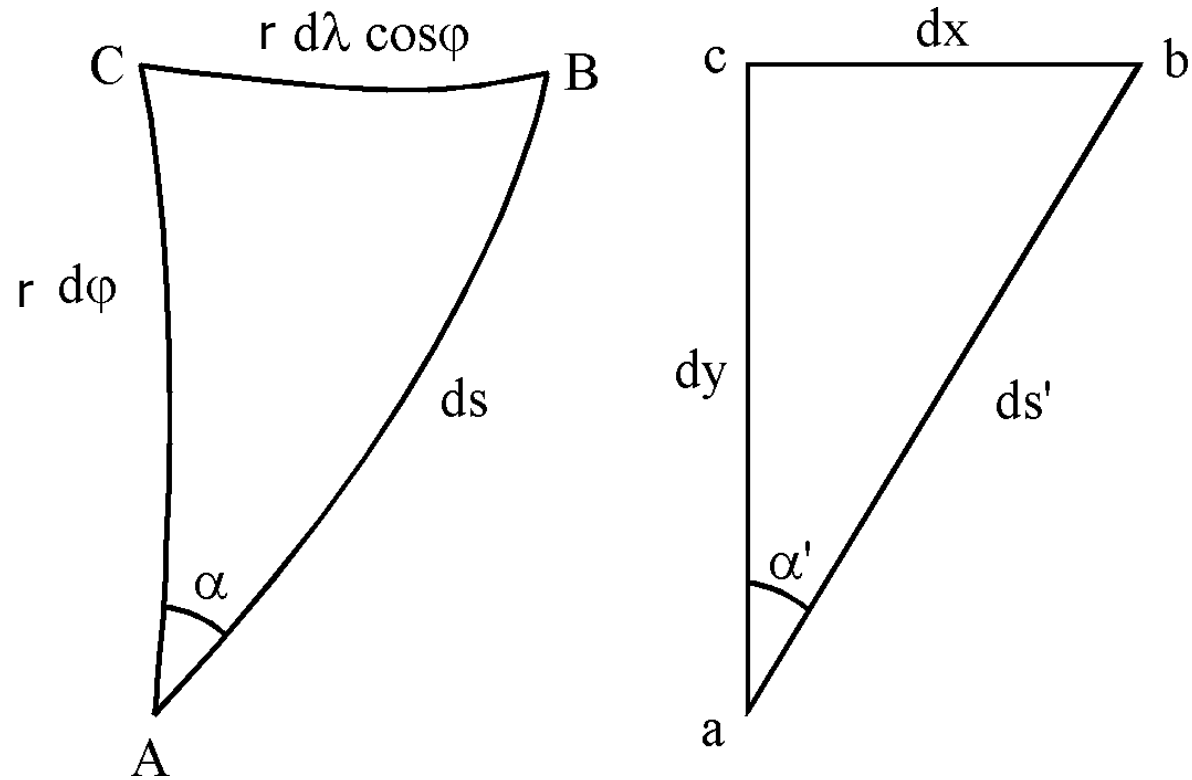
- Infatti l'ascissa è data dalla lunghezza dell'arco di equatore Oa' (uguale al prodotto del raggio della sfera r per l'angolo al centro espresso in radianti), mentre l'ordinata aa' si ricava dal triangolo rettangolo Taa' .



La rappresentazione cartografica

- La proiezione cilindrica diretta non è isogona;
- Considerando i due triangoli infinitesimi, si ha che, relativamente al triangolo sulla sfera:
 - AC è una differenza di latitudine $rd\varphi$;
 - BC un archetto di parallelo uguale al corrispondente arco di equatore per il coseno della latitudine $r(d\lambda \cos \varphi)$;
- mentre, relativamente al triangolo sulla carta:
 - ac è la differenza tra l'ordinata di b e quella di a :
$$dy = r(\tan \varphi' - \tan \varphi);$$
 - bc è invece la differenza tra le ascisse:
$$dx = r(\lambda' - \lambda) = rd\lambda.$$

La rappresentazione cartografica



La rappresentazione cartografica

- Se per ipotesi la carta fosse isogona, gli angoli α e α' sono uguali, e i triangoli sono simili;
- Ciò comporta che:

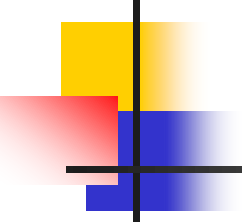
$$\frac{ac}{AC} = \frac{bc}{BC} = \frac{ab}{AB} = n$$

La rappresentazione cartografica

- Il primo termine è pari a:

$$\begin{aligned} n_m &= \frac{ac}{AC} = \frac{dy}{rd\varphi} = \frac{rd \tan \varphi}{rd\varphi} = \frac{\tan \varphi' - \tan \varphi}{d\varphi} = \\ &= \frac{\frac{\sin \varphi'}{\cos \varphi'} - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}}{d\varphi} = \frac{\frac{\sin \varphi' \cos \varphi - \cos \varphi' \sin \varphi}{\cos \varphi' \cos \varphi}}{d\varphi} = \end{aligned}$$

La rappresentazione cartografica


$$\begin{aligned} & \frac{\sin(\varphi' - \varphi)}{\cos \varphi' \cos \varphi} = \frac{\sin(\varphi + d\varphi - \varphi)}{\cos \varphi' \cos \varphi} = \frac{\sin d\varphi}{\cos \varphi' \cos \varphi} = \\ & \frac{d\varphi}{\cos \varphi' \cos \varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} = \sec^2 \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin d\varphi &\cong d\varphi \\ \cos \varphi' &\cong \cos \varphi \end{aligned}$$

La rappresentazione cartografica

- Il secondo termine risulta essere:

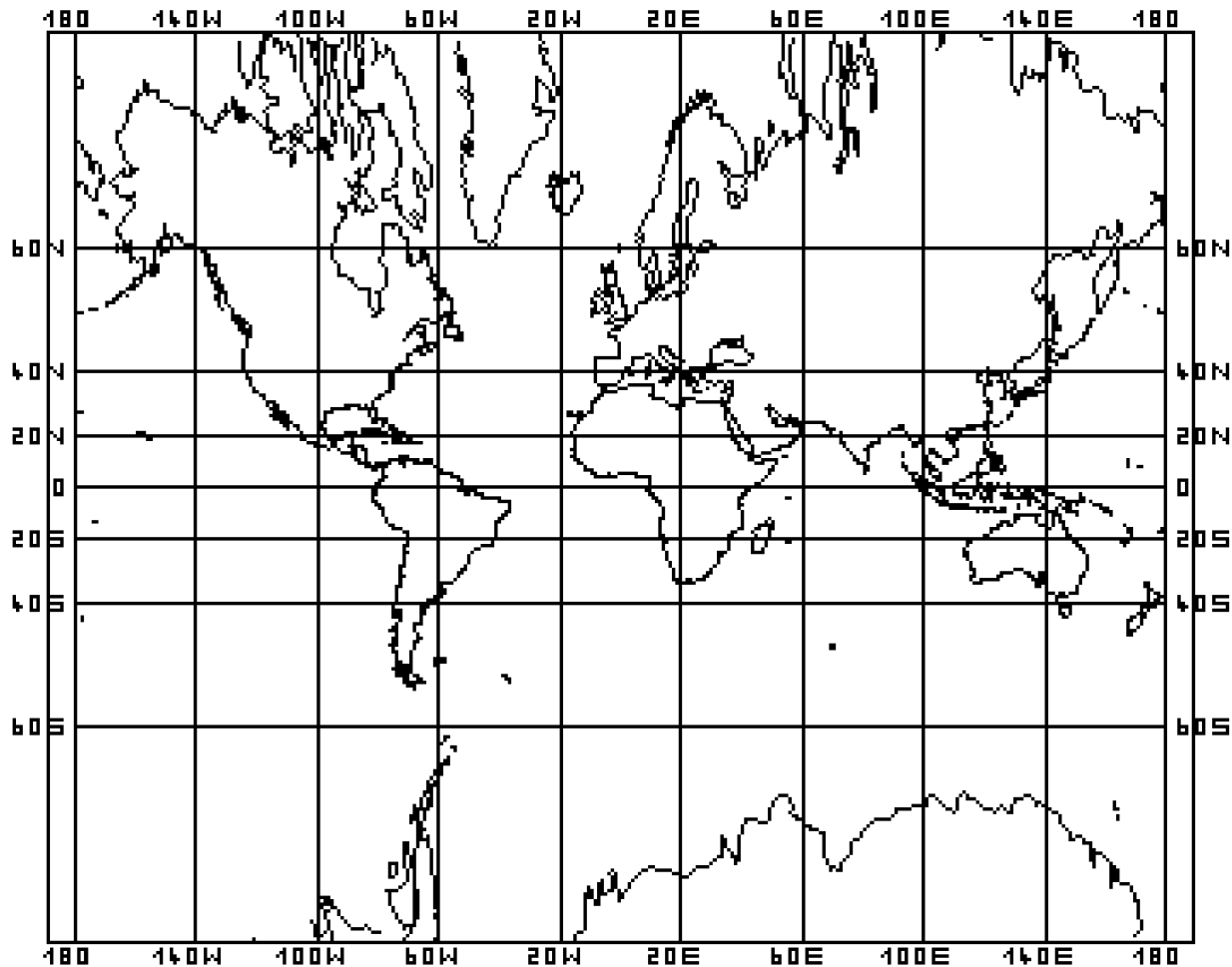
$$n_p = \frac{bc}{BC} = \frac{dx}{rd\lambda \cos \varphi} = \frac{rd\lambda}{rd\lambda \cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} = \sec \varphi$$

La rappresentazione cartografica



- Poiché risulta $n_m \neq n_p$, la carta non è isogona;
- Si riporta di seguito una carta cilindrica diretta tangente.

La rappresentazione cartografica



La rappresentazione cartografica

Carta di Mercatore

- Gerhard Kremer (meglio noto come Mercatore), illustrò una carta in cui la rappresentazione dei meridiani era la stessa della carta cilindrica pura, mentre la legge di distribuzione dei paralleli veniva modificata in modo da rendere la carta isogona.
- Il criterio seguito da Mercatore fu quello di imporre la condizione di uguaglianza tra i due moduli di riduzione lineare n_m e n_p .

La rappresentazione cartografica

- Affinché la carta sia isogona è necessario che i due triangoli siano simili e cioè che venga soddisfatta la seguente proporzione:

$$\frac{dy}{rd\varphi} = \frac{dx}{rd\lambda \cos \varphi} = \frac{ds'}{ds}$$

La rappresentazione cartografica

- In particolare il Mercatore si ha seguito tre caratteristiche principali per costruire la sua carta:
 1. La carta deve essere di tipo cilindrico;
 2. L'equatore deve essere rappresentato per intero;
 3. La carta deve essere isogona.
- Dalla 1° proprietà risulta che meridiani e paralleli sono ortogonali tra loro (reticolato geografico della corrispondente proiezione cilindrica);
- Dalla 2° proprietà si ricava la 1° relazione di corrispondenza della carta, come nel caso della proiezione cilindrica: $x = r\lambda$

La rappresentazione cartografica

- Dalla 3° proprietà si ottiene la 2° relazione di corrispondenza;
- Affinché la carta sia isogona, si dovrà porre:

$$\frac{dy}{rd\varphi} = \frac{dx}{rd\lambda \cos \varphi} = \frac{ds'}{ds} = n$$

- da cui si ricava: $dy = r \sec \varphi d\varphi$

La rappresentazione cartografica

- Con un procedimento matematico detto d'integrazione, si ottiene:

$$y = r \ln \tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) = r \varphi_c$$

- essendo \ln il logaritmo naturale (di base e).
- L'espressione ricavata, espressa in radianti, è nota come *latitudine crescente* (*meridional parts*).

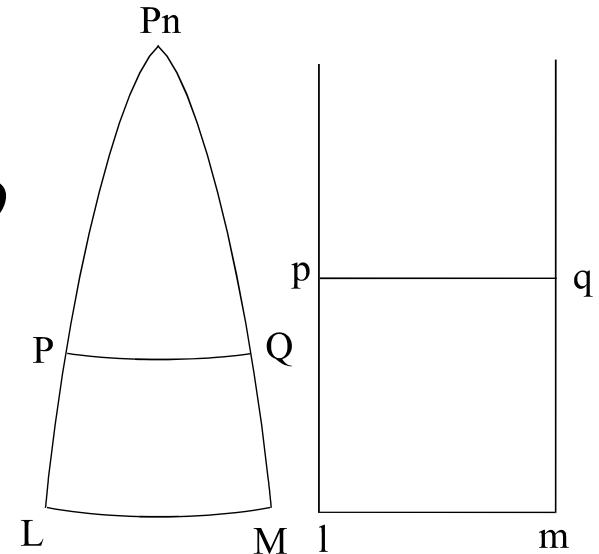
La rappresentazione cartografica

- Mercatore, che ai suoi tempi non conosceva ancora il calcolo integrale, pervenne alla legge di distribuzione dei paralleli col seguente ragionamento:
- un arco di parallelo PQ sulla sfera, posto a latitudine φ (uguale al simile arco di equatore LM per il coseno della sua latitudine), sulla carta cilindrica viene trasformato in un segmento pq avente la stessa lunghezza dell'arco di equatore subendo, pertanto, un'amplificazione uguale a $1 / \cos \varphi = \sec \varphi$

La rappresentazione cartografica

- Affinché la carta sia isogona, anche un arco di meridiano $d\varphi$ posto alla latitudine φ deve essere amplificato della stessa quantità e pertanto:

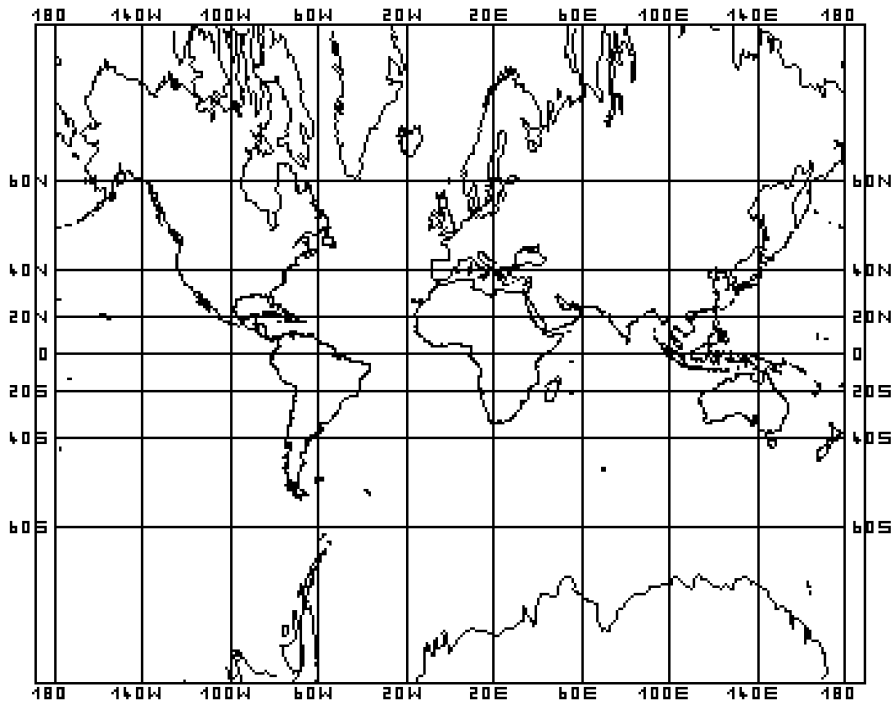
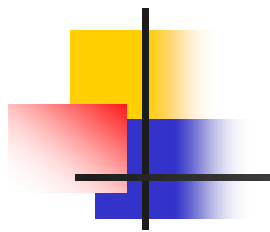
$$dy = d\varphi / \cos \varphi = \sec \varphi d\varphi$$



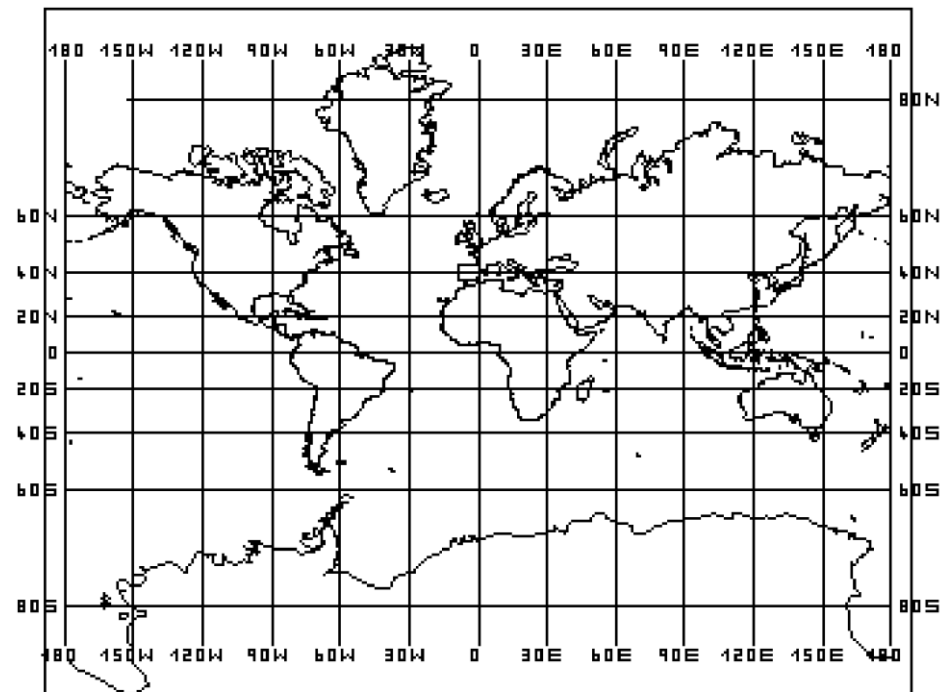
La rappresentazione cartografica

- La distanza di un parallelo di latitudine φ dall'equatore fu, pertanto, ricavata da Mercatore dividendo l'arco di meridiano in tanti tratti infinitesimi $d\varphi$, posti ciascuno a una latitudine diversa, e moltiplicando ciascuno di essi per la secante della corrispondente latitudine:
$$d\varphi \sec 0^\circ + d\varphi \sec d\varphi + d\varphi \sec 2d\varphi + \dots + d\varphi \sec(\varphi - d\varphi)$$
- da cui il nome di *latitudine crescente*.

La rappresentazione cartografica



Proiezione cilindrica diretta tangente



Carta di Mercatore

La rappresentazione cartografica



- Le principali curve di navigazione vengono rappresentate sulla carta di Mercatore nel seguente modo:
- l'*ortodromia*, da una curva che volge la concavità verso l'equatore; essa, di conseguenza, presenta un flesso ogniqualvolta attraversa l'equatore stesso;
- la *lossodromia*, per l'isogonismo della carta, da una retta in quanto tale curva taglia i meridiani (fascio di rette parallele) sotto un angolo costante.

La rappresentazione cartografica

- Per limitare ulteriormente le deformazioni lineari si può considerare un cilindro non più tangente all'equatore ma secante lungo due paralleli di latitudine φ_0 simmetrici rispetto all'equatore (*paralleli standard* o *isomecoiche*);
- ciò corrisponde a considerare il modulo di riduzione lineare uguale a:

$$n = n_0 \sec \varphi = \cos \varphi_0 \sec \varphi$$

La rappresentazione cartografica



- Le relazioni di corrispondenza della carta secante, essendo essa relativa ad una sfera di dimensioni ridotte (di raggio $r' = n_0 r$), sono uguali a quelle della carta tangente moltiplicate per $n_0 = \cos \varphi_0$.