Capitolo 8

DINAMICA DEI CORPI

SOLUZIONE ESERCIZI PROPOSTI Pagina 155 - 157

Esercizio 1 (vedi figura 13)

Soluzione
Calcolo il momento M = F r = 40 0,2 = 8 N m

Applico la seconda legge della dinamica (moto rotatorio)

M = J ε

Da cui ricavo l'accelerazione angolare ε = M / J = 8 / 2 = 4 rad/s^2

==

Esercizio 2

Soluzione
Calcolo la velocità angolare del rotore $\omega = \frac{2\,\pi\,n}{60} = \frac{2\,\pi\,1500}{60} = 157\;rad/s$

Applico la seconda legge della dinamica (moto rotatorio)

M = J ε

Da cui ricavo l'accelerazione angolare ε = M / J = 700 / 9 = 77,7 rad/s^2
Dalla formula $\omega = \varepsilon\, t$ ricavo il tempo $t = \frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{157}{77,7} = 2,02\;s$

==

Esercizio 3

Soluzione
4 giri corrispondono ad α = 2 π 4 = 25,13 rad

Calcolo il lavoro L = M α = 50 25,13 = 1256 J

==

Esercizio 4

Soluzione
Calcolo la velocità angolare dell'elica $\omega = \frac{2\,\pi\,n}{60} = \frac{2\,\pi\,150}{60} = 15,7\;rad/s$

Potenza P = 20000 CV = 20000 0,7355 = 14710 kW = 14710000 W

Dalla formula P = M ω ricavo
il Momento della coppia assorbita dall'elica M = P / ω = 14710000 / 15,7 = 936942 N m

===

Esercizio 5

Soluzione
Calcolo il momento d'inerzia del volano di diametro medio D = 2 m e massa m = 100 kg

$$J = \frac{m\, D^2}{4} = \frac{100\ \ 2^2}{4} = 100\ kg\ m^2$$

Applico la seconda legge della dinamica (moto rotatorio)

$$M = J\ \varepsilon$$

Da cui ricavo l'accelerazione angolare ε = M / J = 40 / 100 = 0,4 rad/s^2

Calcolo la velocità angolare $\omega = \varepsilon\, t = 0{,}4 \cdot 120 = 48\, rad/s$

Calcolo $n = \frac{\omega}{2\,\pi} = \frac{48}{2\,\pi} = 7{,}64\ \ giri/s$

===

Esercizio 6

Soluzione
Momento coppia motrice M_{CM} = 150 N m
Applico la seconda legge della dinamica (moto rotatorio)

$$M = J\ \varepsilon = 0{,}015\ 10 = 0{,}15\ N\ m$$

Momento della coppia resistente $M_{CR} = M_{CM} – M$ = 150 – 0,15 = 149,85 N m

===

Esercizio 7

Soluzione
Calcolo il momento d'inerzia del cilindro cavo di diametro medio d = 280 mm = 0,28 m
e massa m = 20 Kg

$$J = m\frac{d_{medio}^2}{4} = \frac{20\ \ 0{,}28^2}{4} = 0{,}392\ kg\ m^2$$

Applico la seconda legge della dinamica (moto rotatorio)

M = J ε

Da cui ricavo l'accelerazione angolare ε = M / J = 20 / 0,392 = 51 rad/s^2

Calcolo la velocità angolare raggiuta dopo 5 secondi $\omega = \varepsilon\, t = 51{\cdot}5 = 255\; rad/s$

==

Esercizio 8

Soluzione
Calcolo il momento d'inerzia del volano, noto il suo raggio d'inerzia ρ = 80 cm = 0,8 m e massa m = 50 Kg

$$J = m\,\rho^2$$

Velocità angolare iniziale ω_0 = 6,1 rad/s, dopo 30 secondi, raggiunge una velocità angolare ω = 12,2 rad/s

Applico il teorema dell'energia cinetica (moto rotatorio)

$$\text{Lavoro } L = \frac{1}{2}\,J\,\omega^2 - \frac{1}{2}\,J\,\omega_0^2 = \frac{1}{2}\,50 \cdot 0{,}8^2\,(12{,}2^2 - 6{,}1^2) = 1786\text{ J}$$

Calcolo la potenza

$$P = \frac{L}{t} = \frac{1786}{30} = 59{,}53\,W$$

==

Esercizio 9

Soluzione
Il cilindro ha moto roto-traslatorio, cioè la combinazione di un moto d rotazione e di un moto di traslazione.
L'energia potenziale disponibile non varia e vale mgh, mentre l'energia cinetica acquisita si distingue in:
- energia cinetica di traslazione $\frac{1}{2}mv^2$
- energia cinetica di rotazione$\frac{1}{2}J\omega^2$

il principio di conservazione dell'energia diventa:

$$m \cdot g = \frac{1}{2}m \cdot v^2 + \frac{1}{2}J \cdot \omega^2$$

Sapendo che $J = \frac{1}{2}m\,r^2$ e che $\omega = \frac{v}{r}$ e semplificando l'espressione precedente si trova:

$$v = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot g \cdot h} = 4{,}57\;m/s$$

==

Esercizio 10

Soluzione

Calcolo il momento d'inerzia del cilindro di raggio r = 12 cm = 0,12 m e massa m = 4 Kg

$$J = \frac{m\,r^2}{2} = \frac{4\ \ 0{,}12^2}{2} = 0{,}0288\ kg\ m^2$$

Calcolo il momento applicato al cilindro M = F r = 2 · 0,12 = 0,24 N m

Applico la seconda legge della dinamica (moto rotatorio)

M = J · ε

Da cui ricavo l'accelerazione angolare ε = M / J = 0,24 / 0,0288 = 8,33 rad/s^2

Calcolo la velocità angolare raggiuta dopo 5 secondi $\omega = \varepsilon \cdot t = 8{,}33\ \ 5 = 41{,}67\ rad/s$

==

Esercizio 11

Soluzione

Calcolo l'energia cinetica $Ec = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$

$Ec\ traslazione = \frac{1}{2}\ m\ V^2 = \frac{1}{2}\ \ 1\ \ 2{,}2^2 =$ 2,42 J

Dalla formula $V = \omega\, r$ ricavo la velocità angolare $\omega = \frac{V}{r} = \frac{2{,}2}{0{,}2} = 11\ rad/s$

Calcolo il momento d'inerzia del disco di raggio r = 20 cm = 0,2 m e massa m = 1 Kg

$$J = \frac{m\,r^2}{2} = \frac{1\ \ 0{,}2^2}{2} = 0{,}02\ kg\ m^2$$

Calciolo l'energia cinetica rotazionale $Ec_{rotazione} = \frac{1}{2}\ J\ \omega^2 = \frac{1}{2}\ \ 0{,}02\ \ 11^2 =$ 1,21 J

$$Ec = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} J \cdot \omega^2 = 2{,}42 + 1{,}21 = 3{,}63\ J$$

Percentuale di energia cinetica rotazionale rispetto all'energia cinetica totale

$$\frac{Ec_{rot}}{Ec} = \frac{1{,}21}{2{,}42} 100 = 50\ \%$$

Si noti che quando un corpo è in moto roto-traslatorio l'energia cinetica rotazionale può rappresentare una parte considerevole dell'energia meccanica complessiva.

In particolare, se la massa del disco non è distribuita omogeneamente, ma si trova localizzata nella zona periferica, il momento d'inerzia, rispetto ad un disco omogeneo avente lo stesso raggio e la stessa massa, è maggiore e l'energia meccanica rotazionale rappresenterà una percentuale ancora maggiore.

==

Esercizio 12

Soluzione
Velocità disco V_0 = 0,54 km/h = 0,15 m/s

Calcolo il lavoro resistente necessario per fermarlo

$$L = \frac{1}{2}m \cdot v^2 + \frac{1}{2}J \cdot \omega^2$$

Sapendo che $J = \frac{1}{2}m\,r^2$ e che $\omega = \frac{v}{r}$ e semplificando l'espressione precedente si trova

$$L = \frac{1}{2}m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}m \cdot r^2 \left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{3}{4}mv^2 = 2{,}36\,J$$

==

Esercizio 13

Soluzione
Calcolo la quantità di moto del pattinatore con braccia tese

$$q = J_0\,\omega_0 = 4{,}5\ \ 6{,}3 = 28{,}35\ kg\ m^2\ /s$$

Calcolo il momento d'inerzia del pattinatore con braccia al petto, raggio r = 25 cm = 0,25 m e massa m = 70 kg

$$J = \frac{m\,r^2}{2} = \frac{70\ \ 0{,}25^2}{2} = 2{,}18\ kg\ m^2$$

La quantità di moto rimane costante quindi q = J ω da cui ricavo la nuova velocità angolare del pattinatore con braccia al petto

$$\omega = \frac{q}{J} = \frac{28{,}35}{2{,}18} = 13\ rad/s$$

Calcolo l'energia cinetica del pattinatore con braccia tese

$$Ec_0 = \frac{1}{2}\,J_0\,\omega_0^2 = \frac{1}{2}\ \ 4{,}5\ \ 6{,}3^2 = 89{,}3\ \mathrm{J}$$

Calcolo l'energia cinetica del pattinatore con braccia al petto

$$Ec = \frac{1}{2}\,J\,\omega^2 = \frac{1}{2}\ \ 2{,}18\ \ 13^2 = 184{,}2\ \mathrm{J}$$

==

Esercizio 14

Soluzione

Calcolo il momento d'inerzia totale (disco + massa sul bordo)

$$J_{tot} = 300 + m\ r^2 = 300 + 10\ 1^2 = 310\ kg\ m^2$$

Calcolo il momento applicato al disco $M = F\ r = 10\ 1 = 10\ N\ m$

Applico il teorema della quantità di moto

$M\ t = J_{tot}\ (\omega - \omega_0)$ da cui ricavo il tempo (il disco parte da fermo quindi $\omega_0 = 0$)

$$t = \frac{J_{tot}\ \omega}{M} = \frac{310\ \ 1}{10} = 31s$$

==

Elisa e Maurizio