Capitolo 2

STATICA – FORZE NELLO SPAZIO

SOLUZIONI ESERCIZI PROPOSTI Pagina 43 - 46

Esercizio 1 (vedi figura 16)

Soluzione
Osservando la figura, ricavo F_{XZ} = F cos θ° = 915 cos 30° = 792,41 N

F_Y = F sen θ° = 915 sen 30° = 457,5 N

F_X = F_{XZ} cos ϒ = 792,41 cos 55° = 454,5 N

F_Z = F_{XZ} sen ϒ = 792,41 sen 55° = 651,56 N

==

Esercizio 2

Soluzione
Applico il teorema di Carnot considerando due forze uguali di 500 N, l'angolo ϒ è = 140°

$R_{1,2} = F\sqrt{2(1-cos\Upsilon)} = 500\sqrt{2\,(1-\cos 140°)}$ = 939,69 N

$R_{3,4} = F\sqrt{2(1-cos\Upsilon)} = 500\sqrt{2\,(1-\cos 140°)}$ = 939,69 N

Quindi R = $R_{1,2}$ + $R_{3,4}$ = 939,69 + 939,69 = 1879,38 N

==

Esercizio 3 (vedi figura 17)

Soluzione
Osservando la figura posso esprimere il vettore $\vec{R} = 8\cdot\hat{\imath} + 3\cdot\hat{\jmath} + 4\cdot\hat{k}$

==

Esercizio 4 (vedi figura 18)

Soluzione
Proietto F_2 sull'asse X…………………F_{2x} = - F_2 cos β = - 100 cos 45° = - 70,7 N
Proietto F_2 sull'asse Y…………………F_{2y} = + F_2 sen β = + 100 sen 45° = + 70,7 N

Proietto F_1 sull'asse X…………………F_{1x} = + F_1 cos α = + 150 cos 15° = + 144,8 N
Proietto F_1 sull'asse Y…………………F_{1y} = + F_1 sen α = + 150 sen 15° = + 38,8 N

Risultante sull'asse X…………………..R_x = F_{1x} + F_{2x} = + 144,8 – 70,7 = + 74,1 N
Risultante sull'asse Y…………………..R_y = F_{1y} + F_{2y} = + 38,8 + 70,7 = + 109,5 N

Quindi la risultante è $R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2} = \sqrt{74{,}1^2 + 109{,}5^2} =$ 132,2 N
L'angolo ϒ che essa forma con l'asse x risulta $\Upsilon = \arctan\frac{Ry}{Rx} = \arctan\frac{109{,}5}{74{,}1} =$ 55,9°

==

Esercizio 5 (vedi figura 19)

Soluzione
Proietto F_1 sull'asse X…………………F_{1x} = + F_1 cos 30° = + 150 cos 30° = + 130 N
Proietto F_1 sull'asse Z…………………F_{1z} = + F_1 cos 60° = + 150 cos 60° = + 75 N

Componente della risultante sull'asse X……F_x = F_{1x} - F_3 = + 130 – 100 = + 30 N

Componente della risultante sull'asse Y……F_2 = + 100 N

Componente della risultante sull'asse Z……F_{1z} = + 75 N

Calcolo ora la risultante $R = \sqrt{Fx^2 + F2^2 + F1z^2} = \sqrt{30^2 + 100^2 + 75^2} =$ 128,55 N

==

Esercizio 6

Soluzione
Somma tra le forze $\vec{F_1} + \vec{F_2} = \big((2-2),(-3+7),(4+4)\big) = (0,4,8)$

Differenza tra le forze $\vec{F_1} - \vec{F_2} = \big((2+2),(-3-7),(4-4)\big) = (4,-10,0)$

==

Esercizio 7

Soluzione
Prodotto $\lambda\ \vec{F_1} = \Big(\big(3(-2)\big),\big(3(-3)\big),\big(3(4)\big)\Big) = (-6,-9,12)$

==

Esercizio 8

Soluzione
$F_1 = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} =$ 5,38

==

Esercizio 9

Soluzione

Prodotto scalare $\overrightarrow{F_1}\ \overrightarrow{F_2} = \big((1\ \ 1) + \big((-2)(-3)\big) + (4\ \ 0)\big) = 1 + 6 + 0 = 7$

No i vettori non sono perpendicolari in quanto il loro prodotto scale è diverso da zero

==

Esercizio 10

Soluzione

Prodotto scalare F_1 F_2 cos 30° = 14 22 cos 30° = 266,7

==

Esercizio 11

Soluzione

Esercizio inverso al precedente, dalla formula $F_1\ F_2 \cos\theta\ = 20\sqrt{2}$

Ricavo l'ampiezza dell'angolo formato dalle direzioni dei due vettori

$$\theta\ = \arccos\frac{20\sqrt{2}}{F_1\ F_2} = arcos\ \frac{20\sqrt{2}}{5\ \ 10} = 55{,}5°$$

==

Esercizio 12

Soluzione

Calcolo il modulo di F_1 $\qquad F_1\ =\ \sqrt{1^2+2^2}\ =\ \sqrt{5}$

Calcolo il modulo di F_2 $\qquad F_2\ =\ \sqrt{1^2+3^2}\ =\ \sqrt{10}$

Calcolo l'angolo $\qquad \theta_1\ = arcos\ \frac{2}{F_1} = arcos\frac{2}{\sqrt{5}} = 26{,}5°$

Calcolo l'angolo $\qquad \theta_2\ = arcos\ \frac{3}{F_2} = arcos\frac{3}{\sqrt{10}} = 18{,}4°$

Quindi l'ampiezza dell'angolo formato dai vettori è $\quad \theta = \theta_1 - \theta_2 = 26{,}5° - 18{,}4° = 8{,}1°$

OPPURE

$$\overrightarrow{F_1}\cdot\overrightarrow{F_2} = X_1\cdot X_2 + Y_1\cdot Y_2 = 1\cdot 1 + 2\cdot 3 = 7$$

e poiché $\overrightarrow{F_1}\cdot\overrightarrow{F_2} = F_1\cdot F_2\cdot\cos\theta$

$$7 = \sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\cos\theta$$

$$\cos^{-1}\vartheta = \frac{7}{\sqrt{50}} = 8{,}1°$$

==

Esercizio 13

Soluzione
Calcolo l'angolo tra i due vettori θ = arcos 0,71 = 44,7°

Dalla formula F_V = F cos θ ricavo il modulo di F = 12/0,71 = 17

Dalla formula V_F = V cos θ ricavo il modulo di V = 15/0,71 = 21

===

Esercizio 14

Soluzione
Le due forze sono perpendicolari quando il loro prodotto scale è uguale a zero

$$\overrightarrow{F_1}\ \overrightarrow{F_2} = \left((1\ \ (-2)) + (1\ k) + (2\ \ 6)\right) = \ -2 + k + 12 = 0$$

Da cui ricavo il valore del parametro k = - 10

===

Esercizio 15

Soluzione
Le due forze sono perpendicolari quando il loro prodotto scale è uguale a zero

$$\overrightarrow{F_1}\ \overrightarrow{F_2} = \left((1\ k) + \left((k-2)\ 2\right) + (3\ \ 5)\right) = \ k + 2k - 4 + 15 = 0 \qquad 3k = -11$$

Da cui ricavo il valore del parametro k = - 11/3

===

Esercizio 16

Soluzione
Prodotto vettoriale

$$\overrightarrow{F_1} \times \overrightarrow{F_2} = (Y_1 \cdot Z_2 - Z_1 \cdot Y_2)\boldsymbol{i} + (Z_1 \cdot X_2 - X_1 \cdot Z_2)\boldsymbol{j} + (X_1 \cdot Y_2 - Y_1 \cdot X_2)\boldsymbol{k}$$

Quindi

$$\overrightarrow{F_1} \times \overrightarrow{F_2} = (2 \cdot 1 - 3\ \cdot 1)\boldsymbol{i} + (3 \cdot 1 - 1 \cdot 1)\boldsymbol{j} + (1 \cdot 1 - 2 \cdot 1)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{-1i + 2j - 1k}$$

===

Esercizio 17

Soluzione
Considero il vettore $\overrightarrow{F_3}$ (X_3 , Y_3 , Z_3)

Due forze sono perpendicolari quando il loro prodotto scale è uguale a zero

$\overrightarrow{F_1}\ \overrightarrow{F_3} = \big((1\,X_3) + (1\,Y_3) + (1\,Z_3)\big) = X_3 + Y_3 + Z_3 = 0$

$\overrightarrow{F_2}\ \overrightarrow{F_3} = \big((0\,X_3) + (2\,Y_3) + (1\,Z_3)\big) = 2Y_3 + Z_3 = 0$

Dalla seconda equazione ricavo $Z_3 = -2Y_3$

la sostituisco nella prima e ricavo $X_3 + Y_3 - 2Y_3 = 0$ quindi $X_3 = Y_3$

pongo $X_3 = 1$ da cui $Y_3 = 1$ e $Z_3 = -2$

Quindi il vettore contemporaneamente ortogonale agli altri due è $\overrightarrow{F_3}$ (1 , 1 , - 2)

==

Esercizio 18

Soluzione

Somma tra i vettori $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \big((2+4),(5-2),(0+0)\big) = (6,3,0)$

Differenza tra i vettori $\overrightarrow{F_1} - \overrightarrow{F_2} = \big((2-4),(5+2),(0-0)\big) = (-2,7,0)$

Prodotto scalare $\overrightarrow{F_1}\ \overrightarrow{F_2} = \big((2\ \ 4) + (5\,(-2)) + (0\ \ 0)\big) = 8 - 10 = -2$

Prodotto vettoriale

$$\overrightarrow{F_1} \times \overrightarrow{F_2} = (Y_1 \cdot Z_2 - Z_1 \cdot Y_2) + (Z_1 \cdot X_2 - X_1 \cdot Z_2) + (X_1 \cdot Y_2 - Y_1 \cdot X_2)$$

Quindi

$$\overrightarrow{F_1} \times \overrightarrow{F_2} = (Y_1 \cdot Z_2 - Z_1 \cdot Y_2)\boldsymbol{i} + (Z_1 \cdot X_2 - X_1 \cdot Z_2)\boldsymbol{j} + (X_1 \cdot Y_2 - Y_1 \cdot X_2)\boldsymbol{k}$$

$$\overrightarrow{F_1} \times \overrightarrow{F_2} = (5 \cdot 0 - 0\ \cdot (-2))\boldsymbol{i} + (0 \cdot 4 - 2 \cdot 0)\boldsymbol{j} + (2 \cdot (-2)) - 5 \cdot 4)\boldsymbol{k} = -24\,\boldsymbol{k}$$

==

Esercizio 19

Soluzione

Calcolo il modulo di F_1 $\qquad F_1 = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0} = \sqrt{25} = 5$

Calcolo il modulo di F_2 $\qquad F_2 = \sqrt{0 + 8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$

Prodotto vettoriale

$$\overrightarrow{F_1} \times \overrightarrow{F_2} = (Y_1 \cdot Z_2 - Z_1 \cdot Y_2)\boldsymbol{i} + (Z_1 \cdot X_2 - X_1 \cdot Z_2)\boldsymbol{j} + (X_1 \cdot Y_2 - Y_1 \cdot X_2)\boldsymbol{k}$$

Quindi

$\overrightarrow{F_1} \times \overrightarrow{F_2} = (4 \cdot 6 - 0 \ \cdot 8)\boldsymbol{i} + (0 \cdot 0 - (-3) \cdot 6)\boldsymbol{j} + (-3 \cdot 8) - 4 \cdot 0)\boldsymbol{k} = 24\boldsymbol{i} + 18\boldsymbol{j} - 24\boldsymbol{k}$

Ricavo l'angolo compreso fra i due vettori $\theta = arcsen \frac{18}{5 \ 10} = 21°$

===

Esercizio 20

Soluzione

Calcolo il modulo di b $b = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{29} = 5{,}4 \ cm$

Dato che F (-18, 0, 0) b (4, -2, 3)

Calcolo il modulo del vettore Momento

$$\overrightarrow{F_1} \times \overrightarrow{F_2} = (Y_1 \cdot Z_2 - Z_1 \cdot Y_2)\boldsymbol{i} + (Z_1 \cdot X_2 - X_1 \cdot Z_2)\boldsymbol{j} + (X_1 \cdot Y_2 - Y_1 \cdot X_2)\boldsymbol{k}$$

Quindi

$$\vec{F} \times \vec{b} = (0 \cdot 3 - 0 \ \cdot (-2))\boldsymbol{i} + (0 \cdot 4 - (-18) \cdot 3)\boldsymbol{j} + (-18 \cdot (-2) - 0 \cdot 4)\boldsymbol{k} = 0\boldsymbol{i} + 54\boldsymbol{j} + 36\boldsymbol{k}$$

$$modulo = \sqrt{56^{2+}36^2} = 66{,}57 \ N \ cm$$

Dalla formula $\vec{F} \times \vec{b} = F \ \ b \ sen \, \theta$

Ricavo l'angolo compreso fra i due vettori $\theta = arcsen \frac{66{,}57}{18 \ \cdot 5{,}4} = 43{,}23°$

===

Elisa e Maurizio